第10章　小波包变换及其应用

- 简介
- 小波包的定义与性质
- 小波空间的精细分割
- 小波包滤波器组
- 最佳小波包基的选取
- 小波包变换的应用

简介

- 由于正交小波变换只对信号的低频部分做进一步分解，而对高频部分也即信号的细节部分不再继续分解，所以小波变换能够很好地表征一大类以低频信息为主要成分的信号，但它不能很好地分解和表示包含大量细节信息（细小边缘或纹理）的信号，如非平稳机械振动信号、遥感图象、地震信号和生物医学信号等。与之不同的是，小波包变换可以对高频部分提供更精细的分解，而且这种分解既无冗余，也无疏漏，所以对包含大量中、高频信息的信号能够进行更好的时频局部化分析。

小波包的定义

正交小波包 的一般解释:

本章仅考虑实系数滤波器. $\{h_n\}_{n\in Z}$ $\{g_n\}_{n\in Z}$ $g_n = (-1)^n h_{1-n}$

$$\begin{cases} \phi(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} h_k \phi(2t-k) \\ \psi(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} g_k \phi(2t-k) \end{cases}$$

为便于表示小波包函数，本章引入以下新的记号：

$$\begin{cases} \mu_0(t) := \phi(t) \\ \mu_1(t) := \psi(t) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_0(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} h_k \mu_0(2t-k) \\ \mu_1(t) = \sqrt{2}\sum_{k\in Z} g_k \mu_0(2t-k) \end{cases}$$

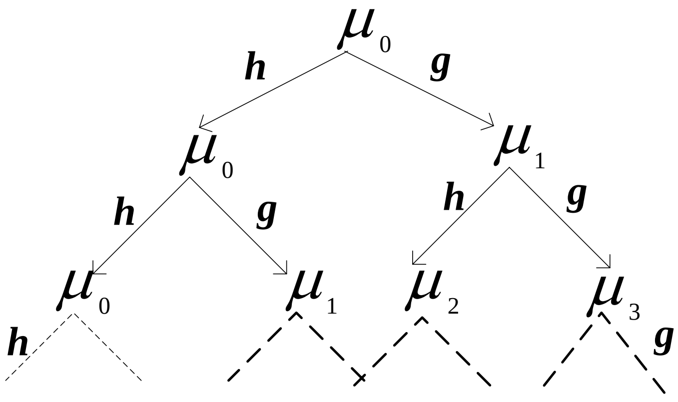
小波包的定义

通过 μ_0, μ_1, h, g 在固定尺度下可定义一组称为小波包的函数。

由

$$\begin{cases} \mu_{2n}(t) = \sqrt{2}\sum_k h_k \mu_n(2t-k) \\ \mu_{2n+1}(t) = \sqrt{2}\sum_k g_k \mu_n(2t-k) \end{cases}$$

递归定义的函数 $\mu_n, n = 0,1,2,\cdots$ 称为由正交尺度函数 $\mu_0 = \phi$ 确定的小波包。



小波包的性质(习题10.1)

性质10.1 μ_n的傅立叶变换可以由$m_0(\omega), m_1(\omega)$ 表示。

$$\begin{cases} m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k e^{-ik\omega} \\ m_1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k g_k e^{-ik\omega} \end{cases}$$

性质10.2 μ_n 具有平移正交性，即

$$\langle \mu_n(t-j), \mu_n(t-k) \rangle = \delta_{j,k}, \ j,k \in Z$$

性质10.3 μ_{2n} 与 μ_{2n+1} 之间具有正交性，即

$$\langle \mu_{2n}(t-j), \mu_{2n+1}(t-k) \rangle = \delta_{j,k}, \ j,k \in Z$$

性质10.4 小波包的平移系 $\{\mu_n(t-k), n \in Z_+, k \in Z\}$ 构成 $L^2(R)$ 的一组规范正交基.

小波空间的精细分割

小波分析存在的不足：

$$L^2(R)=\bigoplus_{j\in Z} W_j \qquad W_j \qquad \left\{\psi_{j,k}\right\}_{j,k\in Z}$$

随着**j**的增大， 相应小波基函数 $\psi_{j,k}$ 的空间局部性越好即空间分辨率越高，而其频谱的局部性变得越差即频谱分辨率越粗。

应对措施：对小波空间$\boldsymbol{W_j}$做进一步分解.

小波空间的分解：

令 U_j^n 表示由小波包 μ_n 的二进伸缩和平移 $2^{j/2}\mu_n\left(2^j t-k\right), k\in Z$ 的线性组合生成的 $L^2(R)$ 的闭子空间，则

$$\begin{cases} U_j^0=V_j, j\in Z \\ U_j^1=W_j, j\in Z \end{cases}$$

小波空间的精细分割

小波空间的分解:

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j,\ j\in Z \iff U_{j+1}^0=U_j^0\oplus U_j^1,\ j\in Z \qquad U_{j+1}^n=U_j^{2n}\oplus U_j^{2n+1},\ j\in Z$$

对于每个 $j=1,2,\cdots,$

$$\begin{aligned}W_j&=U_{j-1}^2\oplus U_{j-1}^3\\&=U_{j-1}^4\oplus U_{j-1}^5\oplus U_{j-1}^6\oplus U_{j-1}^7\\&=\cdots\cdots\\&=U_{j-k}^{2^k}\oplus U_{j-k}^{2^k+1}\oplus\cdots\oplus U_{j-k}^{2^{k+1}-1}\\&=\cdots\cdots\\&=U_0^{2^j}\oplus U_0^{2^j+1}\oplus\cdots\oplus U_0^{2^{j+1}-1}\end{aligned}$$

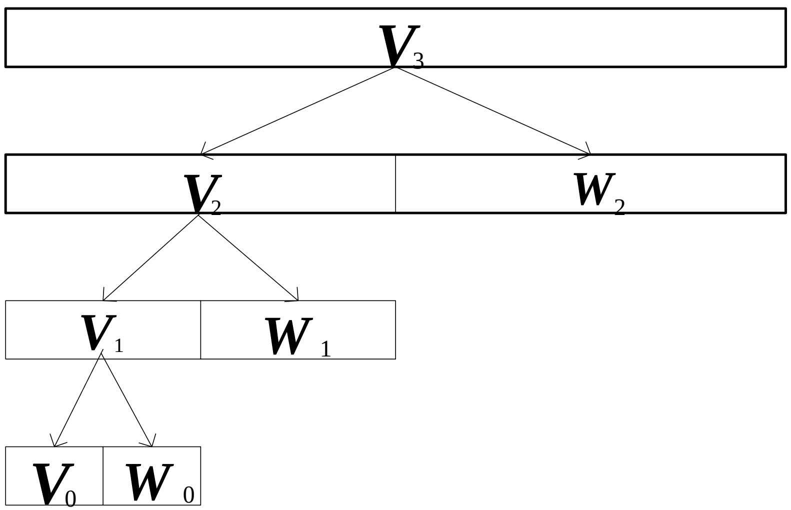
且对给定的 $m=0,\cdots,2^k-1,k=1,\cdots,j$ ，及 $j=1,2,\cdots,$ 函数系

$\left\{2^{\frac{j-k}{2}}\mu_{2^k+m}\left(2^{j-k}t-l\right),l\in Z\right\}$ 是空间 $U_{j-k}^{2^k+m}$ 的一个规范正交基。

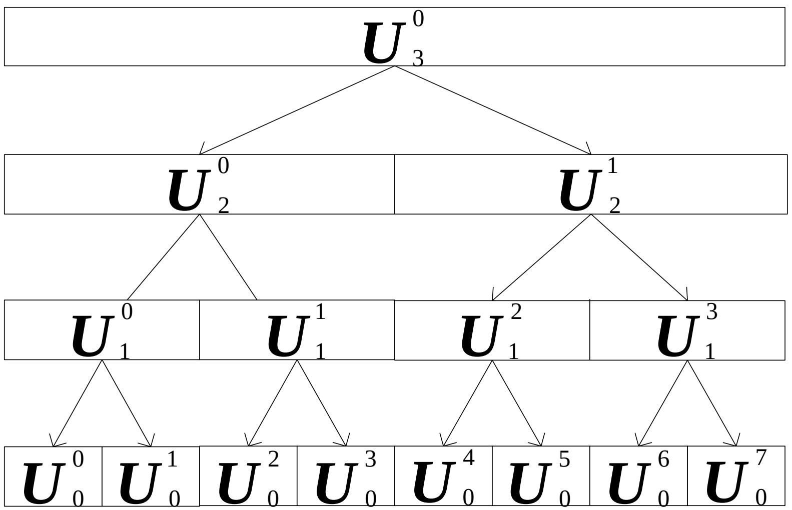
频带划分性质:小波包具有划分较高频率频带的能力，可得到比较好的频率局部化。

一个逼近空间的小波分解及小波包分解

$$V_L = U_L^0 \qquad L = 3$$



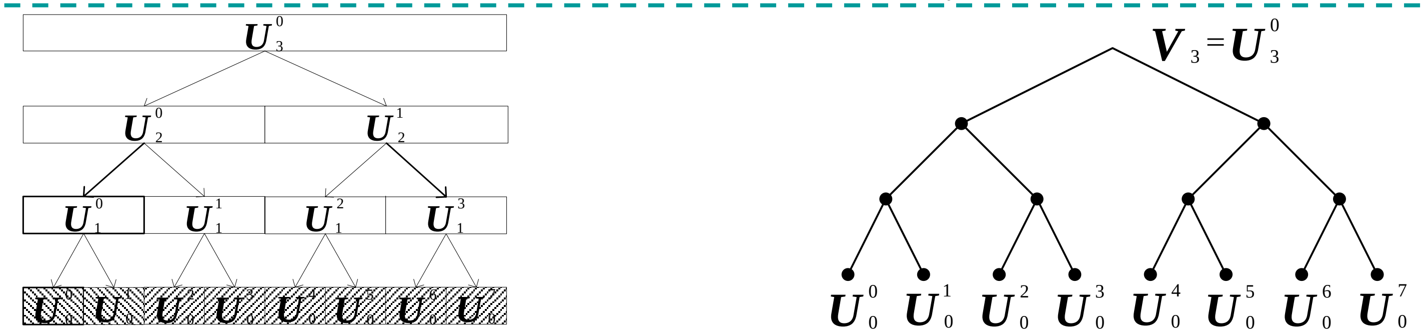
小波分解

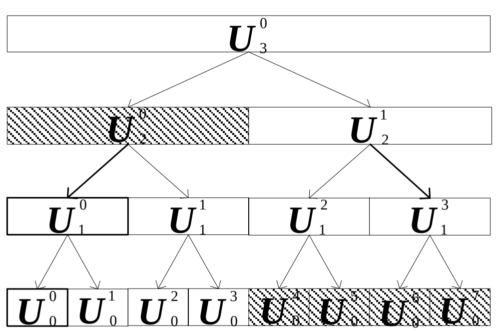


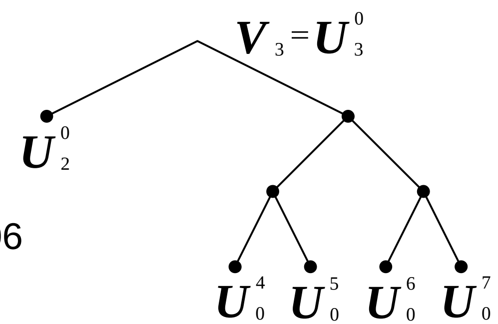
小波包分解

小波包正交基**:** 在右上图$\mathbf{V_3}$的小波包分解的二分树上取一组子空间集合，如果其直和恰能将 $\mathbf{V_3}$空间覆盖，相互间又不重叠，则这组空间集合的正交规范基便组成一个小波包正交基。

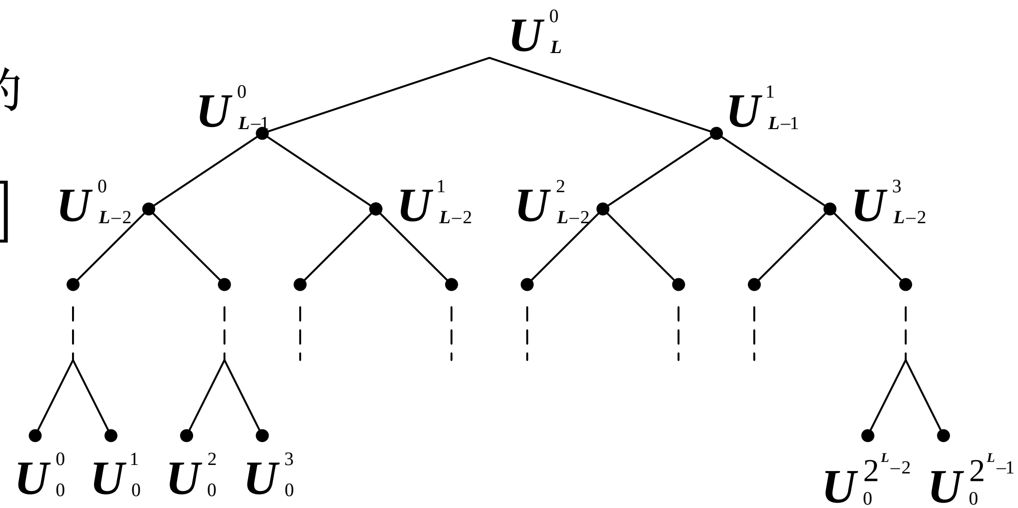
可容许树







小波包滤波器组



已知: 长度为 $N=2^L$ 的均匀采样的

离散输入信号 $b[k]$，首先将 $b[k]$

与在尺度 2^L 下的一个逼近函数

$f(t)\in V_L=U_L^0$ 联系起来，

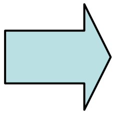
它的分解系数 $a_L[n]=\langle f,\phi_{L,n}\rangle$

满足： $b[k]=N^{1/2}a_L[k]\approx f(N^{-1}k)$

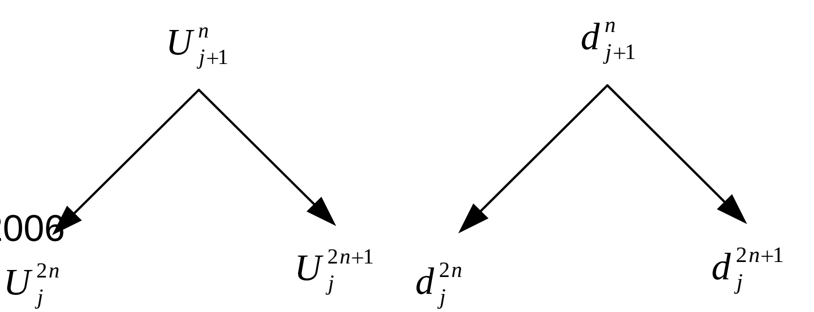
问题:已知**f(t)**在子空间 U_L^0 的子空间 U_{j+1}^n 上的小波包系数，计算出 $f(t)$

在 U_{j+1}^n 的两个子空间 U_j^{2n} 和 U_j^{2n+1} 上的小波包系数.

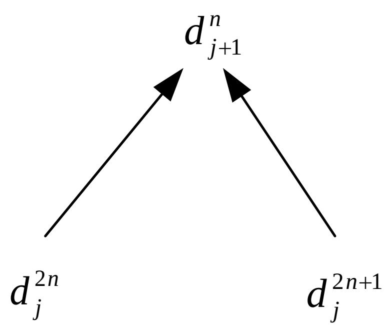
$$d_{j+1}^n[k]=\left\langle f(t),2^{(j+1)/2}\mu_n\left(2^{j+1}t-k\right)\right\rangle$$



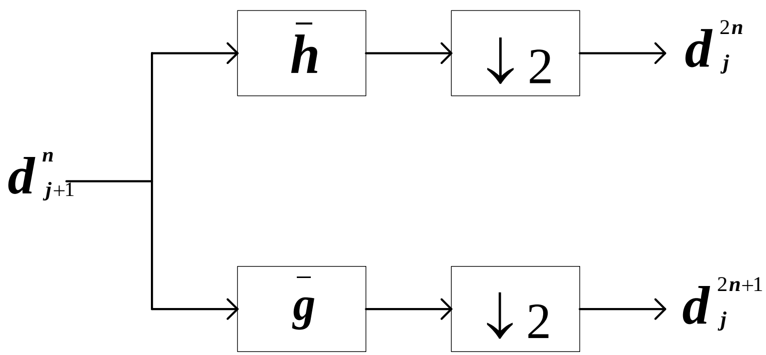
d_j^{2n} d_j^{2n+1} ?



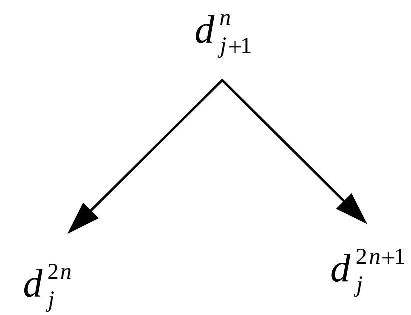
小波包分解算法



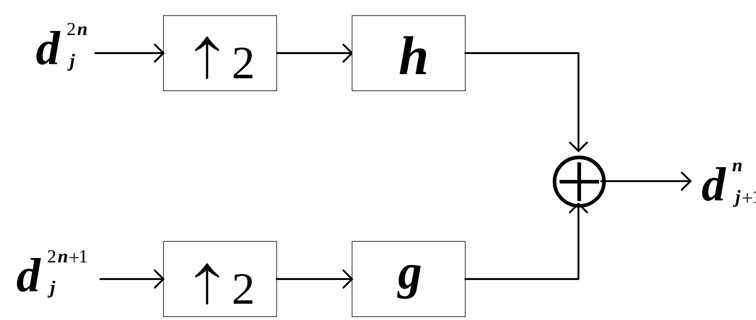
$$\begin{cases} d_j^{2n}[k] = \sum_{l \in Z} h_{l-2k} d_{j+1}^{n}[l] \\ d_j^{2n+1}[k] = \sum_{l \in Z} g_{l-2k} d_{j+1}^{n}[l] \end{cases}$$



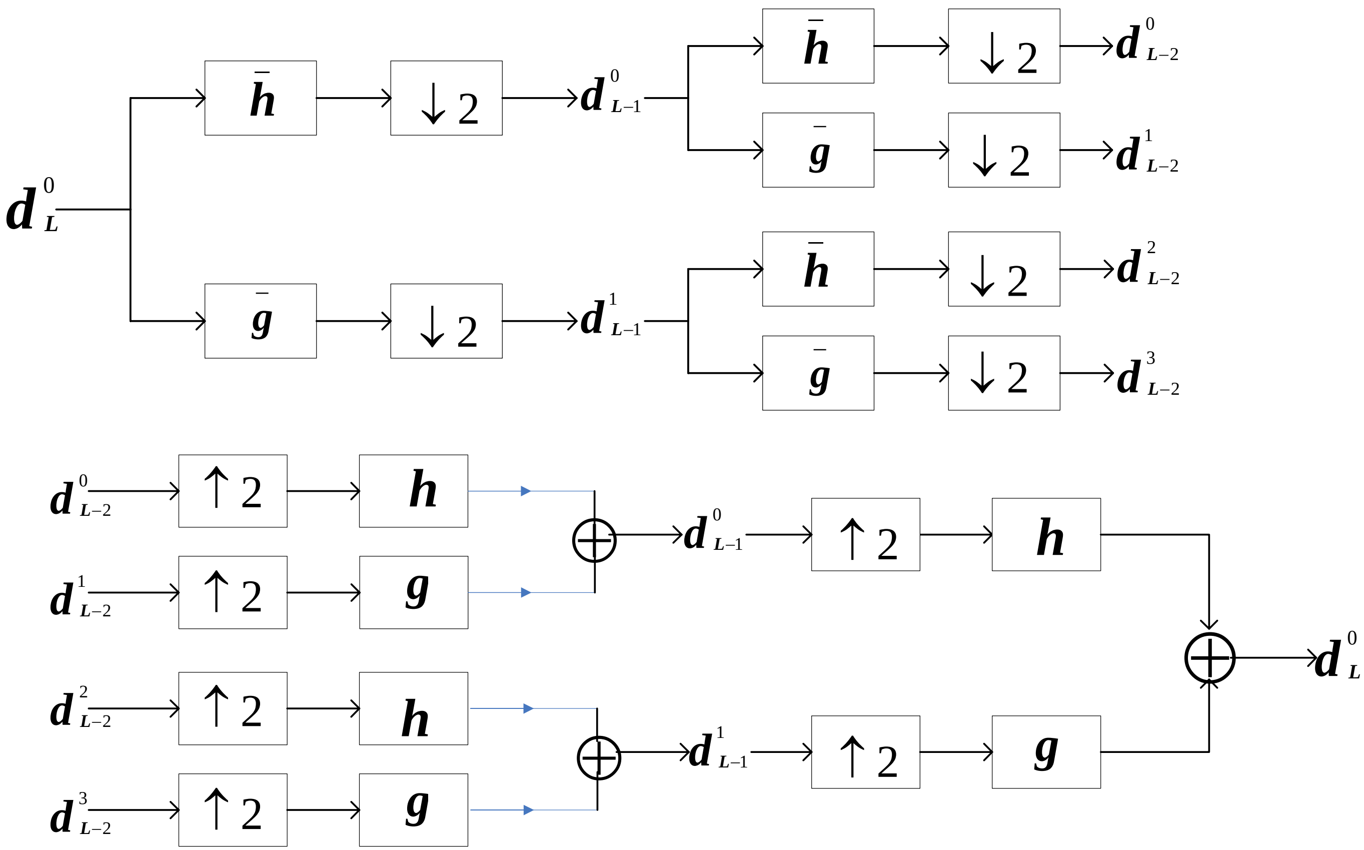
小波包重构算法



$$d_{j+1}^{n}[k] = \sum_{l \in Z} h_{k-2l} d_j^{2n}[l] + \sum_{l \in Z} g_{k-2l} d_j^{2n+1}[l]$$



小波包多级分解与多级重构:



通常从可容许树的小波包系数恢复 $a_L = d_L^0$

小波包分解与重构的边界研拓,小波包的系数个数与计算复杂度问题

最佳小波包基的选取

称函数族 $\left\{2^{j/2}\mu_n\left(2^j t-k\right), n\in Z_+, j,k\in Z\right\}$ 为正交

尺度函数 ϕ 导出的小波库。

1. Mallat正交小波基 $\left\{2^{j/2}\mu_1\left(2^j t-k\right), j,k\in Z\right\}$

2. $L^2(R)=\underset{j\in Z}{\oplus}W_j=\cdots\oplus W_{-1}\oplus W_0\oplus U_0^2\oplus U_0^3\oplus U_0^4\oplus\cdots\oplus U_0^7\oplus\cdots$

$$\left\{\psi_{j,k},\mu_n\left(t-k\right), j=\cdots,-1,0; n=2,3,\cdots; k\in Z\right\}$$

3. $L^2(R)=V_0\oplus W_0\oplus U_0^2\oplus U_0^3\oplus U_0^4\oplus\cdots\oplus U_0^7\oplus\cdots$

与性质**4**的关系

4. ……………

结论**:**小波库中包含许多规范正交基即小波包基**.**

问题**:**什么是最佳小波包基**?**如何从小波库中快速选取**?**

最佳小波包基的选取

信息代价函数

把信号 $f(t)$ 在一个正交小波包基下展开，使得它与一个小波包系数序列 $u=\{u_k\}$ 对应，我们在该序列上定义一个信息代价函数 M,它满足如下两个条件：

（**1**）可加性条件 $$M(\{u_k\})=\sum_{k\in Z}M(u_k),M(0)=0$$

（**2**）代价函数**M**的取值应该反映系数的集中程度.

最佳小波包基

对于一个给定信息代价函数**M,**小波包基 B称为信号**f(t)**相对于该代价函数的最佳基，如果在 $L^2(R)$ 的所有小波包基中，**f(t)**在小波包基 B下对应的小波包系数序列具有最小的信息代价值

最佳小波包基的选取

常用的一些信息代价函数：

（**1**）幅值大于某阈值的系数个数

（**2**） l^p 范数的集中度（**concentration**）

（**3**）对数熵

$$M(u)=\sum_{k\in Z}\log|u_k|^2 \text{，约定} \quad \log 0=0$$

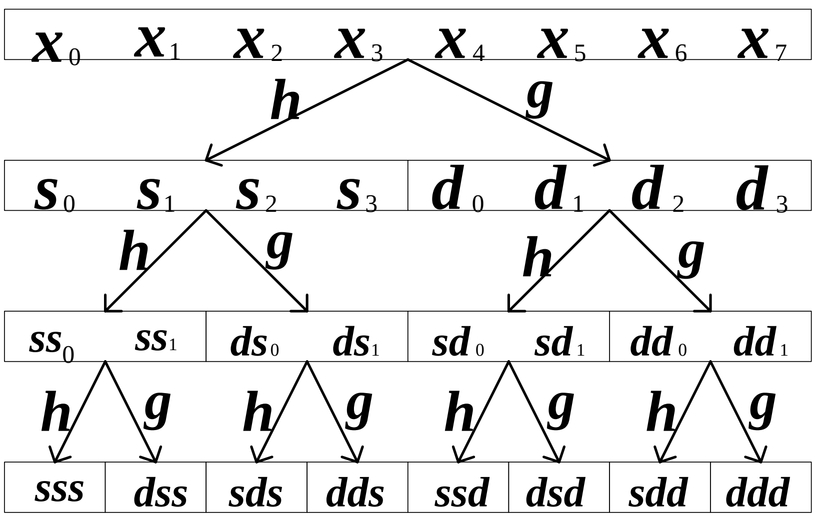
（**4**）信息熵

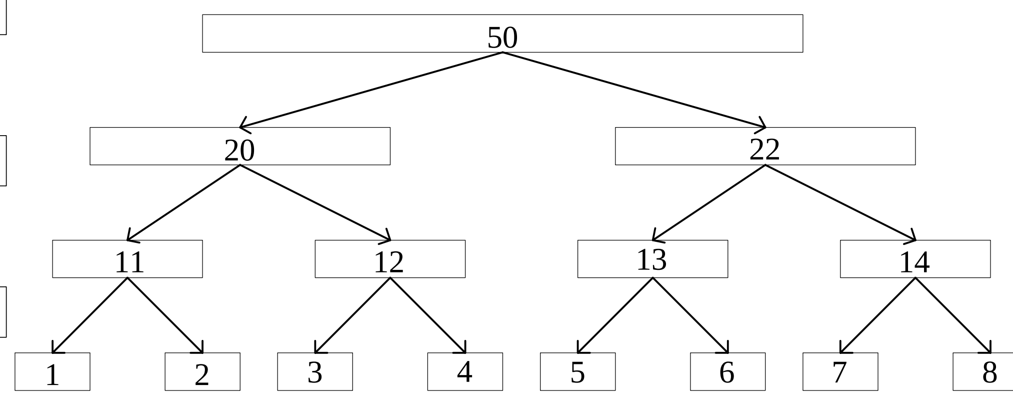
$$H(u)=-\sum_{k\in Z}p_k\log p_k \qquad p_k=\frac{|u(k)|^2}{\sum_{k\in Z}|u(k)|^2} \qquad 0\log 0=0$$

$$M(u)=-\sum_{k\in Z}|u_k|^2\log|u_k|^2,\log 0=0$$

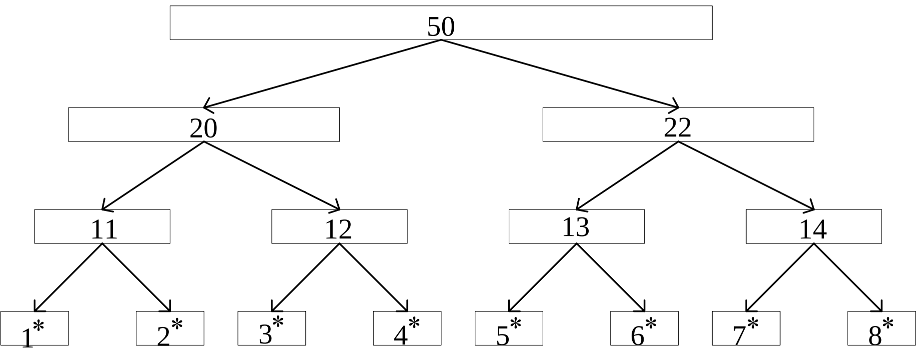
最佳小波包基的选取

在一般情况下，具有最小代价函数值的序列不易计算出来。所幸的是，正如**10.3**节所谈到的，在实际应用中我们通常考虑的是 $\mathbf{L^2(R)}$的一个子空间的小波包分解,这种分解可以用一个小波包二叉树表示.我们可以采取自底向顶的快速搜索法发现最佳小波包基。

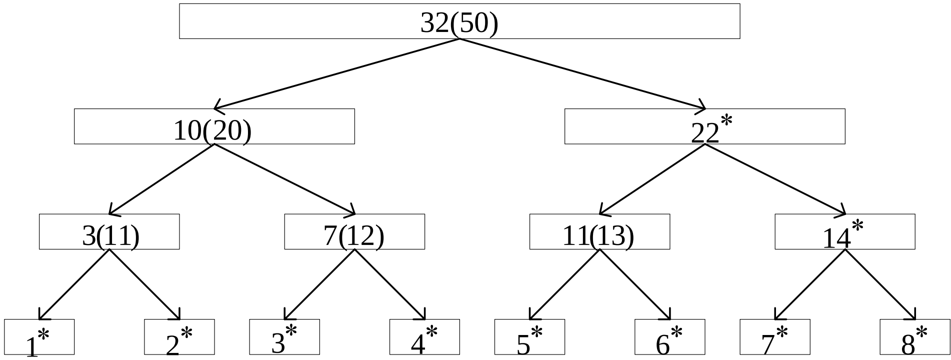




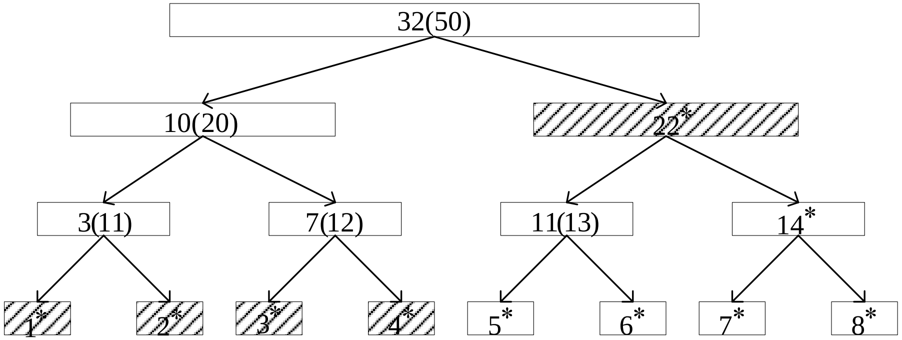
最佳小波包基的选取



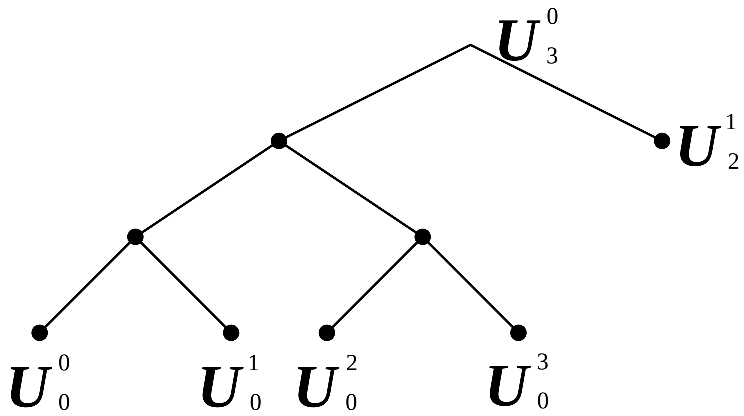
(1)



(2)(3)



(4)

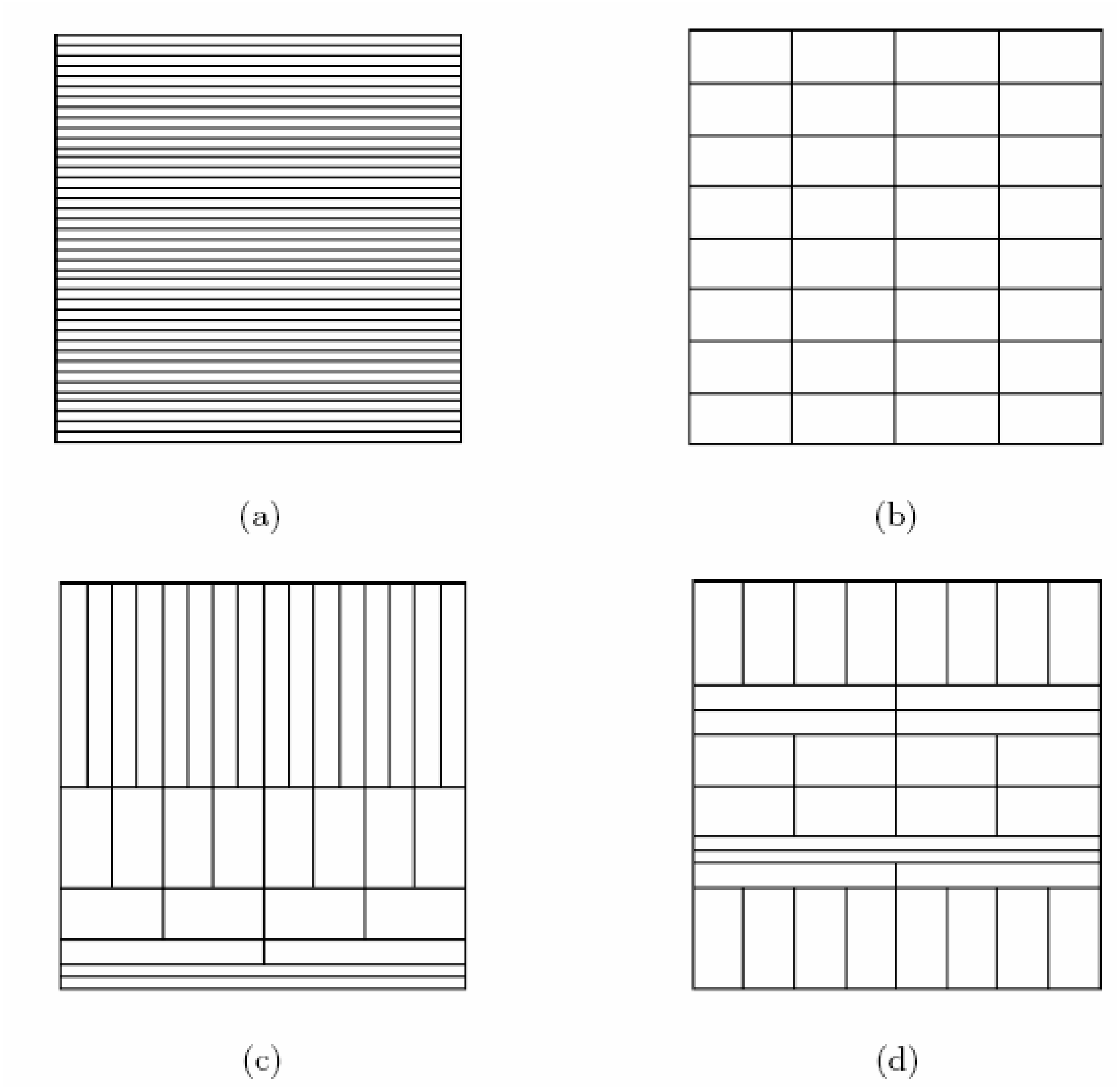


最佳小波包基的选取

从以上讨论可知，最佳基搜索算法主要由两步组成：**1**）搜索构成最佳基的节点；**2**）抽取离树根最近的最佳基节点中的小波包系数。顺便指出，如果小波包分解采用深度优先顺序（**depth-first order**），则最佳基节点的标记过程可以在计算节点中小波包系数的同时完成。由于小波包树具有有限深度，所以以深度优先的搜索算法可在有限步终止。

如果原信号的长度为 N，则最佳基算法的计算复杂度为 $O\left(N\log N\right)$

小波包变换的应用



几种不同变换对应的时频平面铺砌

小波包变换的应用

信号小波包分析的基本实现步骤如下：

1）选择适当的小波滤波器，对给定的采样信号进行小波包变换，获得树形结构的小波包系数。

2）选择信息代价函数，利用最佳小波包基选取算法选取最佳基。

3）对最佳正交小波包基对应的小波包系数进行处理。

4）对处理后的小波包系数采用小波包重构算法得到重构信号。

小波包变换的应用

小波包在信号去噪、滤波等方面的应用原理和方法

（**1**）滤波与去噪

（**2**）非平稳机械振动信号的故障诊断

（**3**）特征提取

注意**:**习题**10.1**与**10.2**可以作为作业题选做**.**