小波变换的提升实现

- 小波分解与重构的多相位表示
- 多相位矩阵的因子分解
- 有限滤波器多相位矩阵的提升分解算法
- 举例
- 整数小波变换
- 小波变换提升算法的实现技巧
- 进一步讨论：对称提升分解与实现

整数小波变换

提升算法的一大优点是，它存在整数提升算法，即在忽略归一化因子的情况下，将算子 $\left\lfloor x+\frac{1}{2}\right\rfloor$ 作用于每个提升步骤中的算子 $u_i(z)$ 和 $p_i(z)$ ，即可得到小波变换的整数提升算法。如（**5-3**）小波变换的整数版本如下：

$$s_l^0 = x_{2l} \quad d_l^0 = x_{2l+1}$$

$$d_l^1 = d_l^0 + \left\lfloor \tau(s_l^0 + s_{l+1}^0) + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

$$s_l^1 = s_l^0 + \left\lfloor \nu(d_l^1 + d_{l-1}^1) + \frac{1}{2} \right\rfloor$$

特点：非线性变换

主要应用：图像的无损压缩。

小波变换提升算法的实现技巧

1. 任意长度信号小波变换的提升实现

2. 多级分解时低频与高频分量的调整

3. 边界延拓

任意长度信号小波变换的提升实现

$$x=(x_0,x_1,\cdots,x_{N-1})$$

当*N*为偶数时, 小波分解一次后低频信号与高频信号的长度都是N/2.

当*N*为奇数时, 小波分解一次后低频信号与高频信号的长度分别为(N+1)/2和(N-1)/2.

结论: 对任意的N,小波分解一次后低频信号与高频信号的长度分别为 $C=\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$ 和 $D=\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor$

例:（9-7）小波变换的提升实现如下:

$$s_l^0 = x_{2l} \quad d_k^0 = x_{2k+1} \qquad l = 0,1,\cdots,C-1$$

$$k = 0,1,\cdots,D-1$$

$$d_k^1 = d_k^0 + \alpha(s_k^0 + s_{k-1}^0)$$

$$s_l^1 = s_l^0 + \beta(d_l^1 + d_{l-1}^1)$$

$$d_k^2 = d_k^1 + \gamma(s_k^1 + s_{k+1}^1)$$

$$s_l^2 = s_l^1 + \delta(d_l^2 + d_{l+1}^2)$$

$$for \quad l = 0 \quad to \quad C-1 :$$

$$s_l = \xi \cdot s_l^2$$

$$for \quad k = 0 \quad to \quad D-1$$

$$d_k = d_k^2 / \xi$$

多级分解时低频与高频分量的调整

问题描述：

对 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_{N-1})$ ，首先利用懒小波变换，得到

$x=\left(s_0^0,d_0^0,s_1^0,d_1^0,\cdots,s_{C-1}^0,d_{D-1}^0\right)$ ，经过提升与对偶提升，

可得x的小波变换为 $\left(s_0^1,d_0^1,s_1^1,d_1^1,\cdots,s_{C-1}^1,d_{D-1}^1\right)$

以上过程，不需要申请辅助的内存空间。但为小波变换实现时编程的方便，通常需要将低频系数调整在一起，这需要利用少量的辅助空间来实现。一般地，在进行每次小波变换前，利用少量的内存空间将低频系数与高频系数调整到一起，以便在内存中连续存储，便于程序实现。例如，先获得x的偶序列 $\left(s_0^0,s_1^0,\cdots,s_{C-1}^0\right)$ 与奇序列$\left(d_0^0,d_1^0,\cdots,d_{D-1}^0\right)$ 后，再进行变换。

解决方法：利用少量辅助内存实现多级小波变换

设信号 $x=(x_0,x_1,\cdots,x_{N-1})$ ，其中N为任意自然数。记

$C=\left\lceil \frac{N}{2} \right\rceil$， $C_1=\left\lfloor \frac{C}{2} \right\rfloor$ 。

第1步， 申请一个大小为 $C_1=\left\lfloor \frac{C}{2} \right\rfloor$ 的数组buffer存放高频系数

$d_0^0,d_1^0,\cdots,d_{C_1-1}^0$ ，然后，在原空间中调整信号的低频系数的位置，

使 x 变为 $(s_0^0,s_1^0,\cdots,s_{C-1}^0,x_C,\cdots,x_{N-1})$

第2步， 调整 $x_C,x_{C+1},\cdots,x_{N-1}$ 中的高频系数的位置使 x 变为

$$(s_0^0,s_1^0,\cdots,s_{C-1}^0,x_C,\cdots,x_{C+C_1-1},d_{C_1}^0,\cdots,d_{D-1}^0)$$

第3步，将buffer中暂存的高频系数$d_0^0, d_1^0, \cdots, d_{C_1-1}^0$ 调整到$x_C, \cdots, x_{C+C_1-1}$

占用的位置，使 x 变为$(s_0^0, s_1^0, \cdots, s_{C-1}^0, d_0^0, d_1^0, \cdots, d_{D-1}^0)$

例子：

设信号为（0,1,2,3,4,5,6,7,8），这里N=?, C=?, C1=?

经过第一步后，信号变为__?__. Buffer中存放高频系数——？—

经过第二步后，信号变为__?__.

经过第三步后，信号变为__?__。

N=9, C=5，C_1=2

(**0,2,4,6,8**,5 6,7,8), Buffer中存放高频系数： 1，3

(**0,2,4,6,8**,5, 6,5,7), (**0,2,4,6,8**,1,3,5,7),

边界处理

- 对于（5-3）和（9-7）这些具有线性相位的滤波器，采用对称周期延拓不仅可实现小波变换的完全重构，同时又不增加变换后的数据量。因此，在实现时我们可采用对称周期延拓的方法。

- 在提升实现时，判断是否需要延拓，如果需要（只在边界元素变换时需要），直接取相应的延拓元素即可。没有必要单独编写一个函数来实现延拓

双正交小波变换的对称提升实现

- 问题描述
- 多相位矩阵的对称因子分解
- 对称提升实现

问题描述

多相位矩阵分解存在极大的不唯一性，到底存在多少种分解方法？如何求出所有的分解？如何根据具体的应用，选择一种‘好’的分解方法**?** 尚未解决！

$$\tilde{P}(z)=\begin{bmatrix}1 & \tau(1+z^{-1})\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \nu(1+z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega & 0\\ 0 & 1/\omega\end{bmatrix}\quad \tau=-0.5\quad \nu=0.25\quad \omega=\sqrt{2}$$

$$\tilde{P}(z)=\begin{bmatrix}1 & \alpha(1+z^{-1})\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \beta(1+z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \gamma(1+z^{-1})\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \delta(1+z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\xi & 0\\ 0 & 1/\xi\end{bmatrix}$$

以上（**5**－**3**），（**9**－**7**）对偶多相位矩阵分解有什么特点？是如何求出的？

对称Laurent多项式的概念：

一个Laurent多项式 $a(z)$ 称为对称的，如果 $a(z)=a(z^{-1})$

例如 $a(z)=z+1+z^{-1}$ 是对称的Laurent多项式。

在如下（**5—3**）对偶多相位矩阵的提升分解中

$$\tilde{P}(z)=\begin{bmatrix}1 & \tau(1+z^{-1}) \\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 \\ \nu(1+z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega & 0 \\ 0 & 1/\omega\end{bmatrix}$$

记 $u_1(z)=\tau(1+z^{-1}), p_1(z)=\nu(1+z)$ ，则

$$zu_1(z^2)=\tau(z+z^{-1}), z^{-1}p_1(z^2)=\nu(z+z^{-1})$$

都是对称Laurent多项式.

（**9—7**）对偶多相位矩阵的提升分解也有类似的性质。

若 $\det P(z)=1$ ，则总存在Laurent多项式 $u_i(z)$ 和 $p_i(z)$ $(1\le i\le m)$

以及非零常数 K，使得

$$P(z)=\prod_{i=1}^{m}\begin{bmatrix}1 & u_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1/K\end{bmatrix}$$

其中 $p_m(z)=0$ 。

在上述分解定理中，若 $zu_i\left(z^2\right)$ 和 $z^{-1}p_i\left(z^2\right)$ 都是对称**Laurent**多项式，

则称上述分解是多相位矩阵的对称提升分解。

这表明，前面我们给出的(5-3)、(9-7)双正交小波滤波器的多相位矩阵都是对称提升分解。

一般性问题

- 任意双正交小波滤波器的多相位矩阵是否存在对称提升分解？有多少个？如何快速求出？
- 答案是：存在、唯一、可快速求出

参考文献：

Yankui SUN, Symmetric lifting factorization and matrix representations of biorthogonal wavelet transforms. International Journal of wavelets, multiresolution and information processing , 1(4), 2003, 465-479

ABSTRACT

This paper introduces some properties of symmetric Laurent polynomials, and then extends Euclidean algorithm to symmetric Laurent polynomials. The new results are used to investigate factorization of polyphase matrix for biorthogonal finite filters. It is shown that there exists one and only one symmetric factorization of the polyphase matrix, and the symmetric factorization can be determined directly and efficiently by Euclidean algorithm for symmetric Laurent polynomials. Finally, symmetric implementation and matrix representation of biorthogonal wavelet transforms are introduced, and the study demonstrates that the symmetric implementation has the least multiplication number in all lifting implementations, and it is equivalent to a matrix transform on finite dimensional vector space.

Keywords: Euclidean algorithm; polyphase matrix; symmetric Laurent polynomial; symmetric lifting factorization; biorthogonal wavelet transform; symmetric implementation; matrix representation.

清华大学计算机系 孙延奎 2009

作业

- 习题四任选两题