第四章 小波变换的实现技术

- **Mallat**算法
- 多孔算法
- 小波变换的提升实现

Lifting Scheme

- 概述

1) 设计构造双正交小波。

特点**:**小波构造能够完全在空间域完成

2) 能够改进第一代小波变换算法。

特点**:** 快速、原位实现、逆变换、整数变换、边界处理

3) 可用于构造第二代小波。

特点**:** 摆脱**Fourier**变换、放弃二进伸缩与平移的思想。

小波构造的工具**:** 细分**(Subdivision)**

典型例子如球小波、细分小波及其应用等。

在图形学中有重要应用**.**

本节课的目标

- 给出一个紧支撑的正交或双正交小波滤波器组，能够编程实现它的提升算法。特别地，可学会**(9-7)**、（**5-3**）滤波器的提升实现。
- 涉及到的基本概念与工具包括：多相位矩阵、**Laurent**多项式及其辗转相除法

小波变换的提升实现

- 小波分解与重构的多相位表示
- 多相位矩阵的因子分解
- 有限滤波器多相位矩阵的提升分解算法
- 举例
- 整数小波变换
- 小波变换提升算法的实现技巧
- 进一步讨论：对称提升分解与实现

小波分解与重构的多相位表示

- 滤波器的多相位表示

$\tilde{h}, \tilde{g}, h, g$ 双正交有限长小波滤波器

记 $h_e(z)=\sum_k h_{2k}z^{-k}$ $\quad h_o(z)=\sum_k h_{2k+1}z^{-k}$

滤波器 h 的多相位表示为：

$$h(z)=h_e(z^2)+z^{-1}h_o(z^2)$$

例：$\tilde{h}=h=\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\}$

$h(z)=h_0+h_1z^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-1})$ $\quad h_e(z)=h_0=\frac{1}{\sqrt{2}}$ $\quad h_o(z)=h_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$

根据有限双正交滤波器组的完全重构条件可推出：

$$\tilde{g}(z)=z^{-1}h(-z^{-1}) \qquad g(z)=z^{-1}\tilde{h}(-z^{-1}) \qquad (3\text{-}39)$$

$$\Downarrow$$

$$\tilde{h}_e(z)=g_o(z^{-1}) \qquad \tilde{h}_o(z)=-g_e(z^{-1})$$

$$\tilde{g}_e(z)=-h_o(z^{-1}) \qquad \tilde{g}_o(z)=h_e(z^{-1})$$

例：对于Haar小波 $g(z)=z^{-1}h(-z^{-1})=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}z^{-1}$

$$g_e(z)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad g_o(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

• 滤波器的多相位矩阵

滤波器 h 和 g 的多相位矩阵为：

$$P(z)=\begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix}$$

滤波器 $\tilde{h}$ 和 $\tilde{g}$的多相位矩阵为：

$$\tilde{P}(z)=\begin{bmatrix} \tilde{h}_e(z) & \tilde{g}_e(z) \\ \tilde{h}_o(z) & \tilde{g}_o(z) \end{bmatrix}$$

$\tilde{P}(z)$ 称为 $P(z)$ 的对偶多相位矩阵. 对于正交小波滤波器,有

$$P(z)=\tilde{P}(z)$$

例： Haar小波滤波器的多相位矩阵为

$$h_e(z)=h_0=\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad h_o(z)=h_1=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$g_e(z)=-\frac{1}{\sqrt{2}} \qquad g_o(z)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$P(z)=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

- 试写出**D4**小波滤波器的多相位矩阵

D4小波滤波器的多相位矩阵为

$$P(z)=\tilde{P}(z)=\begin{bmatrix} h_0+h_2z^{-1} & -h_3z^{1}-h_1 \\ h_1+h_3z^{-1} & h_2z^{1}+h_0 \end{bmatrix}$$

$$h_0=\frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},h_1=\frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},h_2=\frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},h_3=\frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

双正交小波滤波器的完全重构条件的等价条件

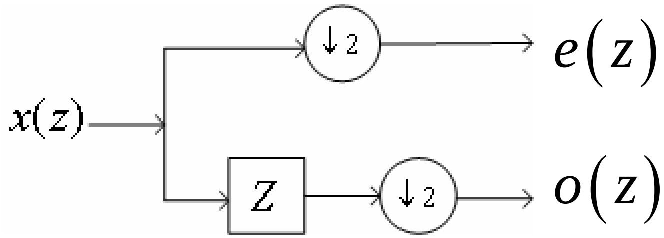
PR条件**:** $$\begin{cases} \tilde{h}(z^{-1})h(z)+\tilde{g}(z^{-1})g(z)=2 \\ h(z)\tilde{h}(-z^{-1})+g\left(z\right)\tilde{g}(-z^{-1})=0 \end{cases}$$ **(3-34)**

由于 $$P(z^2)^T=1/2\begin{bmatrix} h(z) & h(-z) \\ g(z) & g(-z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{bmatrix}$$

$$\tilde{P}(z^2)^T=1/2\begin{bmatrix} \tilde{h}(z) & \tilde{h}(-z) \\ \tilde{g}(z) & \tilde{g}(-z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & z \\ 1 & -z \end{bmatrix}$$

因此**,**对有限长滤波器，**PR**条件**(3-34)**等价于

$$P(z)\tilde{P}(z^{-1})^T=I \qquad \textbf{(4-9)}$$



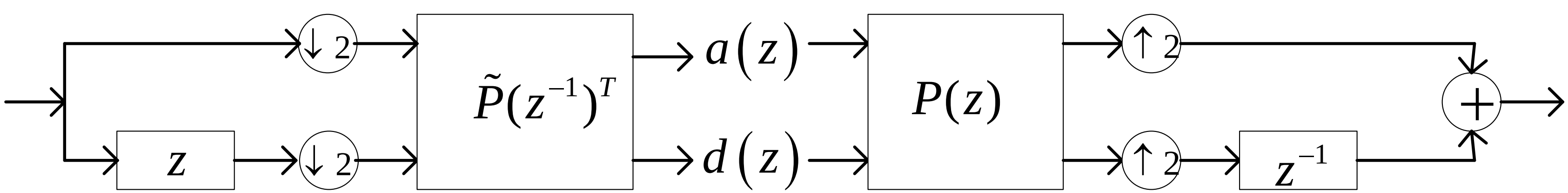
懒小波变换

Lazy wavelet transform

$$e(z)=x_e(z),o(z)=x_o(z)$$

$$\tilde{P}(z^{-1})^T\begin{bmatrix}e(z)\\o(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a(z)\\d(z)\end{bmatrix}$$

与**Mallat**算法的结果相同



小波分解与重构的多相位表示

Laurent多项式是指有限序列的**z**变换。

$$h(z)=\sum_{k=k_b}^{k_e} h_k z^{-k} \quad \text{的次数定义为} \quad |h(z)| = k_e - k_b$$

例： $h(z)=h_0+h_1 z^{-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1+z^{-1}) \qquad |h(z)|=1$

$h(z)=az^k, k\in Z \qquad |h(z)|=0$

思考练习题**:** 若一个**Laurent**多项式的倒数也是**Laurent**多项式**,** 则它一定是**z**的单项式**.**

由 $P(z)\tilde{P}(z^{-1})^{T}=I$ 可知，$\det P(z),\det\tilde{P}(z)$ 都是

z的单项式，不妨设 $\det P(z)=1$。

称滤波器**(h,g)**是互补的，如果它们对应的多相位矩阵的行列式等于**1**。 对于具有紧支集的双正交小波滤波器来说，**(h,g)**是互补的，等价于 $(\tilde{h},\tilde{g})$ 是互补的。

定理（Lifting）[Daubechies+98]：假若 (h,g)是互补的，则任何一个与 h互补的有限支撑滤波器 g^{new}

都具有如下形式：

$$g^{new} = g\left(z\right) + h\left(z\right) s\left(z^2\right)$$

其中， s(z)是一个Laurent多项式。反之，具有上述表达形式的滤波器都是与 h互补的。

以上定理表明，如果(h,g)是互补的，则 $\left(h, g^{new}\right)$ 是互补的

当且仅当存在一个Laurent多项式s(z)使得

$$P^{new}(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e^{new}(z) \\ h_o(z) & g_o^{new}(z) \end{bmatrix} = P(z) \begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定理（ Dual Lifting）[Daubechies+98]：假若 (h,g)是互补的，则任何一个与 g互补的有限支撑滤波器 h^{new}

都具有如下形式：

$$h^{new} = h(z) + g(z)t(z^2)$$

其中， t(z)是一个Laurent多项式。反之，具有上述表达形式的滤波器都是与 g互补的。

以上定理表明，如果(h,g)是互补的，则 (h^{new}, g) 是互补的

当且仅当存在一个Laurent多项式t(z)使得

$$P^{new}(z) = \begin{bmatrix} h_e^{new}(z) & g_e(z) \\ h_o^{new}(z) & g_o(z) \end{bmatrix} = P(z)\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ t(z) & 1 \end{bmatrix}$$

懒性滤波器及其性质：

$$\tilde{h}_n = h_n = \delta_n, \tilde{g}_n = g_n = \delta_{n-1}$$

$$h_e(z) = 1, h_o(z) = 0$$

$$g_e(z) = 0, g_o(z) = 1$$

$$P^{new}(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e(z) \\ h_o(z) & g_o(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

即懒小波滤波器的多相位矩阵是单位矩阵。

多相位矩阵的因子分解

例： D4小波多相位矩阵可分解为:

$$P(z)=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-2}{4}z^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

问题**1**：一般地，如何求出一个多相位矩阵的提升分解？

其具体分解方法将稍后给出。

问题**2**：你能够给这个矩阵分解一个合理的解释吗？

Laurent多项式的带余除法：对任何两个**Laurent**多项式

$a(z)$ 和 $b(z)$ 其中，$b(z)\neq 0,\quad |a(z)|\geq|b(z)|$ **，**则必存在

Laurent多项式 $q(z)$ 和 $r(z)$ **，**使得

$$a(z)=b(z)q(z)+r(z)\qquad |q(z)|=|a(z)|-|b(z)|,|r(z)|<|b(z)|$$

举例**:** $a(z)=z^{-1}+6+z\qquad b(z)=4+4z$

$$q(z)=1/4(z^{-1}+5),r(z)=-4z$$

$$q(z)=1/4(z^{-1}+1),r(z)=4$$

$$q(z)=1/4(5z^{-1}+1),r(z)=-4z^{-1}$$

性质**:** 两个**Laurent**多项式的商和余数不是唯一的。

Laurent多项式的Euclidean算法(辗转相除法):

$$a(z)=a_0(z)=z^{-1}+6+z \qquad b(z)=b_0(z)=4+4z$$

带余除法:

$$b_1(z)=a_0(z)\%b_0(z)=4$$ “余数”

$$q_1(z)=a_0(z)/b_0(z)=1/4z^{-1}+1/4$$ “商”

$$a_1(z)=b_0(z)=4+4z$$ “除数”变为”被除数”

“余数”变为” 除数”

$$b_2(z)=a_1(z)\%b_1(z)=0$$

$$q_2(z)=a_1(z)/b_1(z)=1+z$$

$$a_2(z)=b_1(z)=4$$ “除数”变为”被除数”

因余数为**0,**故终止带余除法**,**且$a_2(z)$为**a(z)**和**b(z)**的最大公因子**.**

$$a_2(z)=\gcd(a(z),b(z))=4$$ $a(z)$ 和 $b(z)$ 是互素的

Laurent多项式的Euclidean算法(辗转相除法)：

$$a(z)=a_0(z)=z^{-1}+6+z \qquad b(z)=b_0(z)=4+4z$$

$$a(z)=q_1(z)b(z)+b_1(z) \qquad b(z)=q_2(z)b_1(z)+b_2(z)$$

$$a_2(z)=b_1(z),b_2(z)=0$$

$$\begin{bmatrix} a_2(z) \\ 0 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_2(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -q_1(z) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a(z) \\ b(z) \end{bmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{bmatrix} a(z) \\ b(z) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} q_1(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} q_2(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_2(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

注意与多项式带余除法和欧几里德算法的异同之处.

$$\begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & q_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_i(z) & 1 \end{bmatrix}$$

当i是奇数时用第一个方程； i是偶数时用第二个方程，可得

$$\begin{bmatrix} a(z) \\ b(z) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q_1(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_2(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & q_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_2(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & q_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_2(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2(z) \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} z^{-1}+6+z \\ 4+4z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4z^{-1}+1/4 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1+z & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 1/4z^{-1}+1/4 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1+z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

设detP(z)=1,则 $h_e(z), h_o(z)$ 是互素的,于是

$$\begin{bmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} q_i(z) & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

不失一般性，设**n**为偶数，这时，有

$$\begin{bmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n/2} \begin{bmatrix} 1 & q_{2i-1}(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ q_{2i}(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \prod_{i=1}^{n/2} \begin{bmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

记

$$P^0(z)=\begin{bmatrix} h_e(z) & g_e^0(z) \\ h_o(z) & g_o^0(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{n/2}\begin{bmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

则 g^0 与 h 是互补的.

从而存在一个Laurent多项式s(z),使得

$$P(z)=P^0(z)\begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

这等价于,

$$P(z)=\prod_{i=1}^{n/2}\begin{bmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$=\prod_{i=1}^{n/2}\begin{bmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & K^2 s(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

[分解定理，Daubechies,Swedens,1998,本书参考文献14]

若 $\det P(z)=1$ ，则总存在Laurent多项式 $u_i(z)$ 和 $p_i(z)$ $(1\le i\le m)$

以及非零常数 K，使得

$$P(z)=\prod_{i=1}^{m}\begin{bmatrix}1 & u_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1/K\end{bmatrix}$$

其中 $p_m(z)=0$ 。

说明：**1.** 存在多少个分解？该定理没有回答！**2.** 该定理只给出了$\mathbf{u_m(z)}$的存在性，没有给出它的具体构造方法，教材参考文献**15**推出了$\mathbf{u_m(z)}$完美的数学计算公式。见下页。

$u_m(z)$ 的计算方法：

第1步，使用欧几里德算法得到：

$$\begin{bmatrix} h_e(z) \\ h_o(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{bmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K \\ 0 \end{bmatrix}$$

第2步，计算

$$P^0(z) = \begin{bmatrix} h_e(z) & g_e^0(z) \\ h_o(z) & g_o^0(z) \end{bmatrix} = \prod_{i=1}^{m-1} \begin{bmatrix} 1 & u_i(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ p_i(z) & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & 1/K \end{bmatrix}$$

第3步，计算 $u_m(z)$

$$u_m(z) = K^2 \begin{vmatrix} g_e(z) & g_e^0(z) \\ g_o(z) & g_o^0(z) \end{vmatrix}$$

具体推导过程参考教材P105。

例： Haar小波多相位矩阵的提升分解

$$P(z)=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix} \qquad \det P(z)=1$$

1）
$$\begin{bmatrix}h_e(z)\\ h_o(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & u_1(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_1(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}$$

2）
$$P^0(z)=\begin{bmatrix}h_e(z) & g_e^0(z)\\ h_o(z) & g_o^0(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & u_1(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_1(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1/K\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2}\\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

3）
$$u_2(z)=K^2\begin{vmatrix}g_e(z) & g_e^0(z)\\ g_o(z) & g_o^0(z)\end{vmatrix}=2\begin{vmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{vmatrix}=0$$

4) $$P(z)=\begin{bmatrix}1 & u_1(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_1(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & u_2(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_2(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1/K\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1/2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 0\\ 0 & 1/\sqrt{2}\end{bmatrix}$$

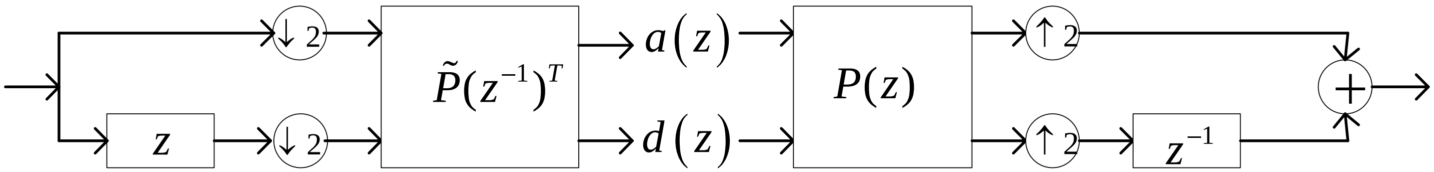
思考练习题： **D4**小波多相位矩阵存在如下提升分解

$$P(z)=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-2}{4}z^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

给出计算过程。

基于提升的小波变换流程图

已知



$$P(z)=\prod_{i=1}^{m}\begin{bmatrix}1 & u_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1/K\end{bmatrix}$$

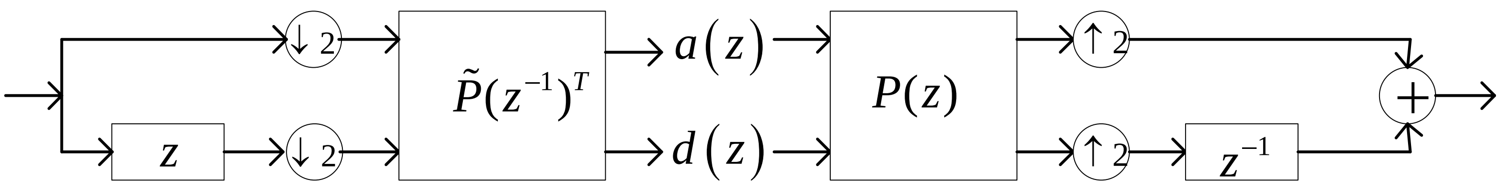
目标: 给出小波变换提升实现的流程图，即任一小波变换都可以由懒小波变换经过若干次提升与对偶提升得到。

由 $P(z)\tilde{P}(z^{-1})^T = I$ 及

$$P(z)=\prod_{i=1}^{m}\begin{bmatrix}1 & u_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1/K\end{bmatrix}$$

可得

$$\tilde{P}(z^{-1})^T=\begin{bmatrix}1/K & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\prod_{i=m}^{1}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -u_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$



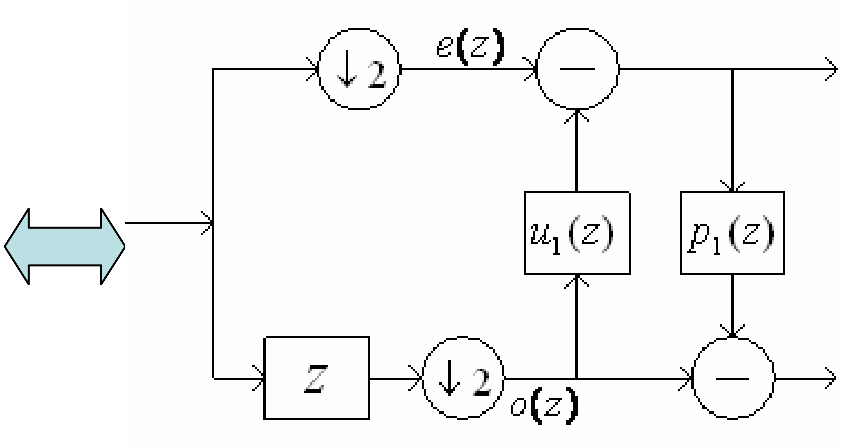
$$\begin{bmatrix}a(z)\\ d(z)\end{bmatrix}=\tilde{P}(z^{-1})^T\begin{bmatrix}e(z)\\ o(z)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1/K & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p_m(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -u_m(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -u_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p_1(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -u_1(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e(z)\\ o(z)\end{bmatrix}$$

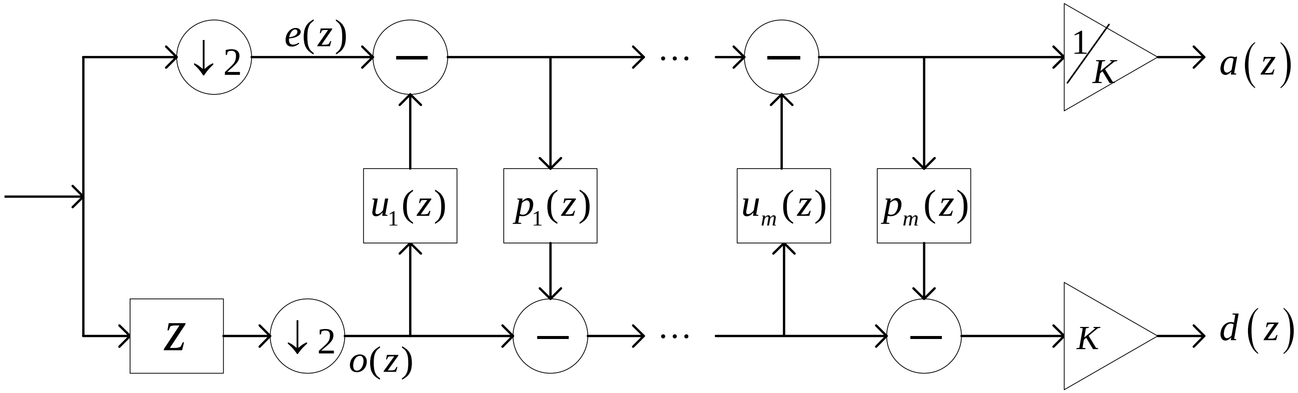
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p_1(z) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -u_1(z) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(z) \\ o(z) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -p_1(z) & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e(z)-u_1(z)o(z) \\ o(z) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} e(z)-u_1(z)o(z) \\ o(z)-p_1(z)[e(z)-u_1(z)o(z)] \end{bmatrix}$$

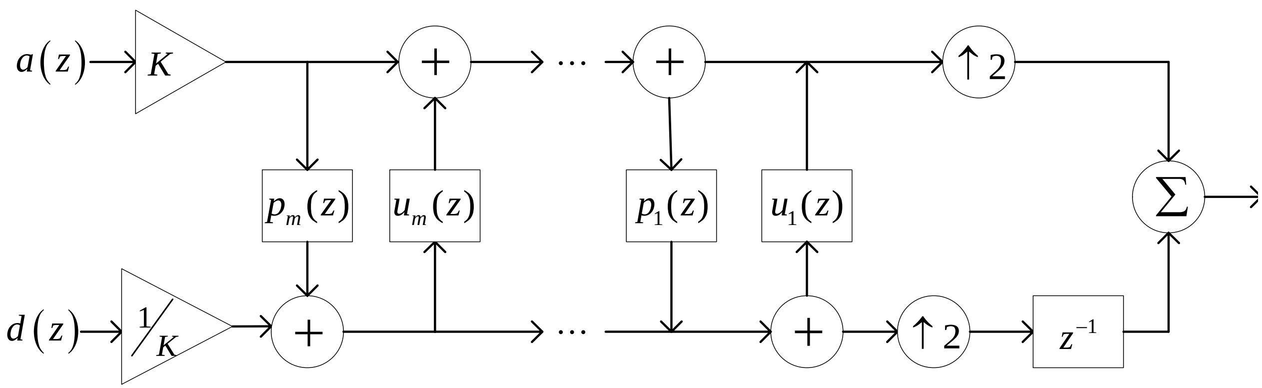


如何从预测、更新的角度解释上述流程图？



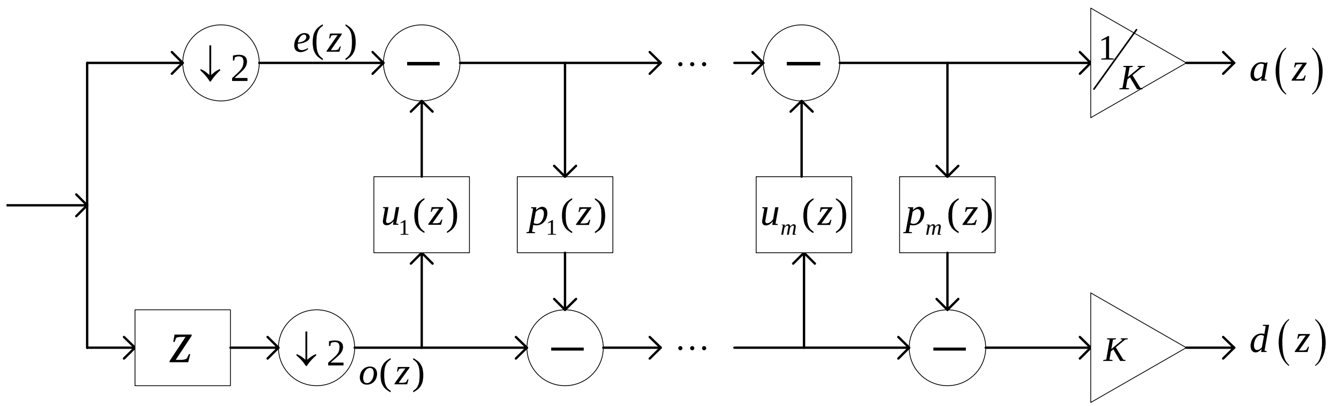
正向小波变换

重要结论：即任一小波变换都可以由懒小波变换经过若干次提升与对偶提升得到。



逆向小波变换

$u_1(z)=q_1(z)$ 是否为0多项式的讨论



1. $u_1(z)=q_1(z)$ 是 $h_e(z)$ 与 $h_o(z)$ 作带余除法的商。

$$u_1(z)\neq 0 \Longleftrightarrow \left|h_e(z)\right|\geq\left|h_o(z)\right|$$

2. $u_1(z)\neq 0$ 时对小波变换提升实现流程图的解释。

3. $u_1(z)=0$ 时对小波变换提升实现流程图的解释。

$u_1(z)\neq 0$ 时小波变换的提升实现算法

$$x=\{x_0,x_1,\cdots,x_{N-1}\}\qquad u_i(z)=\sum_k u_k^i z^{-k}\qquad p_i(z)=\sum_k p_k^i z^{-k}$$

若 $s_i(z),d_i(z)$ 分别是序列 $s^i=\{s_l^i\},d^i=\{d_l^i\}$ $i=1,\cdots,m$ 的z变换，且

$$\begin{bmatrix} s_i(z)\\ d_i(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -u_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{i-1}(z)\\ d_{i-1}(z)\end{bmatrix}\qquad \begin{array}{l} s_0(z)=e(z)\\ d_0(z)=o(z)\end{array}$$

$$\Longleftrightarrow\quad\begin{cases} s_i(z)=s_{i-1}(z)-u_i(z)d_{i-1}(z)\\ d_i(z)=d_{i-1}(z)-p_i(z)s_i(z)\end{cases}$$

$$i=1,2,\cdots,m$$

$$\Longleftrightarrow\quad\begin{cases} s_l^i=s_l^{i-1}-\left(u^i*d^{i-1}\right)_l=s_l^{i-1}-\sum_k u_k^i d_{l-k}^{i-1}\\ d_l^i=d_l^{i-1}-\left(p^i*s^i\right)_l=d_l^{i-1}-\sum_k p_k^i s_{l-k}^i\end{cases}$$

正向小波变换的提升实现算法（预测步骤由奇序列预测偶序列开始）

Step 1. 懒小波变换

$$s_l^0 = x_{2l} \qquad d_l^0 = x_{2l+1} \qquad l = 0,1,\cdots,N/2-1$$

Step 2. 提升与对偶提升

For i =1 to m

$$\begin{cases} s_l^i = s_l^{i-1} - \sum_k u_k^i d_{l-k}^{i-1} \\ d_l^i = d_l^{i-1} - \sum_k p_k^i s_{l-k}^i \end{cases} \qquad l = 0,1,\cdots,N/2-1$$

Step 3. 比例变换

For $l = 0$ to $N/2-1$

$$\begin{cases} s_l = s_l^m / K \\ d_l = K d_l^m \end{cases}$$

$u_1(z) \neq 0$ 时逆向小波变换的提升实现算法

Step 1.比例变换

For $l = 0$ to $N/2 - 1$

$$\begin{cases} s_l^m = K s_l \\ d_l^m = d_l / K \end{cases}$$

Step 2. 提升与对偶提升

For i = *m* to 1

$$\begin{cases} d_l^{i-1} = d_l^i + \sum_k p_k^i s_{l-k}^i \\ s_l^{i-1} = s_l^i + \sum_k u_k^i d_{l-k}^{i-1} \end{cases} \qquad l = 0,1,\cdots,N/2-1$$

Step 3. 逆懒小波变换

$$x_{2l} = s_l^0, \qquad x_{2l+1} = d_l^0 \qquad l = 0,1,\cdots,N/2-1$$

$u_1(z) \neq 0$ 时逆向小波变换的提升实现举例

例： D4小波变换的提升实现

$$P(z)=\begin{bmatrix}1 & -\sqrt{3}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{\sqrt{3}-2}{4}z^{-1} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & z\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0\\ 0 & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$$

$$s_l^0 = x_{2l}, d_l^0 = x_{2l+1}$$

$$s_l^1 = s_l^0 + \sqrt{3} d_l^0$$

$$d_l^1 = d_l^0 - \frac{\sqrt{3}}{4} s_l^1 - \frac{\sqrt{3}-2}{4} s_{l-1}^1$$

$$s_l^2 = s_l^1 - d_{l+1}^1$$

$$s_l = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} s_l^2, d_l = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} d_l^1$$

$u_1(z) \neq 0$ 时逆向小波变换的提升实现举例

例： 标准的Haar小波变换的提升实现

$$P(z) = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$$

正变换

$$s_l^0 = x_{2l}$$

$$d_l^0 = x_{2l+1}$$

$$s_l^1 = s_l^0 + d_l^0$$

$$d_l^1 = d_l^0 - \frac{1}{2} s_l^1$$

$$s_l = s_l^1 / \sqrt{2}$$

$$d_l = \sqrt{2} d_l^1$$

逆变换

$$s_l^1 = \sqrt{2} s_l$$

$$d_l^1 = d_l / \sqrt{2}$$

$$d_l^0 = d_l^1 + \frac{1}{2} s_l^1$$

$$s_l^0 = s_l^1 - d_l^0$$

$$x_{2l} = s_l^0$$

$$x_{2l+1} = d_l^0$$

$u_1(z)=0$ 时提升算法的实现

$$P(z)=\prod_{i=1}^{n}\begin{bmatrix}1 & 0\\ p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & v_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}K & 0\\ 0 & 1/K\end{bmatrix}, v_i(z)=u_{i+1}(z), n=m-1$$

$$\Longleftrightarrow \quad \tilde{P}(z^{-1})^T=\begin{bmatrix}1/K & 0\\ 0 & K\end{bmatrix}\prod_{i=n}^{1}\begin{bmatrix}1 & -v_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p_i(z) & 1\end{bmatrix}$$

$$v_i(z)=\sum_k v_k^i z^{-k} \qquad p_i(z)=\sum_k p_k^i z^{-k}$$

$$\begin{bmatrix}s_i(z)\\ d_i(z)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -v_i(z)\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -p_i(z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s_{i-1}(z)\\ d_{i-1}(z)\end{bmatrix} \qquad \begin{aligned}s_0(z)&=e(z)\\ d_0(z)&=o(z)\end{aligned}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases}d_i(z)=d_{i-1}(z)-p_i(z)s_{i-1}(z)\\ s_i(z)=s_{i-1}(z)-v_i(z)d_i(z)\end{cases}$$

$u_1(z)=0$ 时正向小波变换的提升实现算法（预测步骤由偶序列预测奇序列开始）

Step 1. 懒小波变换

$$s_l^0 = x_{2l} \qquad d_l^0 = x_{2l+1} \qquad l = 0,1,\cdots,N/2-1$$

Step 2. 提升与对偶提升

For i =1 to *n*

$$\begin{cases} d_l^i = d_l^{i-1} - \sum_k p_k^i s_{l-k}^{i-1} \\ s_l^i = s_l^{i-1} - \sum_k v_k^i d_{l-k}^i \end{cases} \qquad l = 0,1,\cdots,N/2-1$$

Step 3. 比例变换

For $l=0$ to $N/2-1$

$$\begin{cases} s_l = s_l^n / K \\ d_l = K d_l^n \end{cases}$$

D4小波变换的提升实现

$$h(z)=h_0+h_1z^{-1}+h_2z^{-2}+h_3z^{-3} \qquad g(z)=-h_3z^2+h_2z^1-h_1+h_0z^{-1}$$

其中 $h_0=\dfrac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},h_1=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},h_2=\dfrac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}},h_3=\dfrac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$

$$P(z)=\tilde{P}(z)=\begin{bmatrix} h_0+h_2z^{-1} & -h_3z^1-h_1 \\ h_1+h_3z^{-1} & h_2z^1+h_0 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{\sqrt{3}-2}{4}z^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$P(z)=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{\sqrt{3}}{4}-\dfrac{\sqrt{3}-2}{4}z \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -z^{-1} & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

D4小波变换的提升实现

第一种实现方法

$$s_l^0 = x_{2l} \qquad d_l^0 = x_{2l+1}$$

$$s_l^1 = s_l^0 + \sqrt{3} d_l^0$$

$$d_l^1 = d_l^0 - \frac{\sqrt{3}}{4} s_l^1 - \frac{\sqrt{3}-2}{4} s_{l-1}^1$$

$$s_l^2 = s_l^1 - d_{l+1}^1$$

$$s_l = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}+1} s_l^2, \quad d_l = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} d_l^2$$

第二种实现方法

$$s_l^0 = x_{2l} \qquad d_l^0 = x_{2l+1}$$

$$d_l^1 = d_l^0 - \sqrt{3} s_l^0$$

$$s_l^1 = s_l^0 + \frac{\sqrt{3}}{4} d_l^1 + \frac{\sqrt{3}-2}{4} d_{l+1}^1$$

$$d_l^2 = d_l^1 + s_{l-1}^1$$

$$s_l = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}} s_l^1 \qquad d_l = \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{2}} d_l^2$$

（5-3）小波变换的提升实现

$$\tilde{h}=\{-\frac{1}{4\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{3}{2\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}},-\frac{1}{4\sqrt{2}}\}\quad , \quad h=\{\frac{1}{2\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{2\sqrt{2}}\}$$

$$\tilde{P}(z)=\begin{bmatrix}1 & \tau(1+z^{-1})\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \nu(1+z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega & 0\\ 0 & 1/\omega\end{bmatrix}\qquad \tau=-0.5\qquad \nu=0.25\qquad \omega=\sqrt{2}$$

$$P(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\tau(1+z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\nu(1+z^{-1})\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\omega & 0\\ 0 & \omega\end{bmatrix}$$

$$s_l^0=x_{2l}\qquad d_l^0=x_{2l+1}$$

$$d_l^1=d_l^0+\tau(s_l^0+s_{l+1}^0)$$

$$s_l^1=s_l^0+\nu(d_l^1+d_{l-1}^1)$$

$$s_l=\omega\cdot s_l^1\ ,\ d_l=d_l^1/\omega$$

正变换

$$s_l^1=s_l/\omega\qquad d_l^1=\omega d_l$$

$$s_l^0=s_l^1-\upsilon(d_l^1+d_{l-1}^1)$$

$$d_l^0=d_l^1-\tau(s_l^0+s_{l+1}^0)$$

$$x_{2l}=s_l^0\quad x_{2l+1}=d_l^0$$

逆变换

$$P(z)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\alpha(1+z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\beta(1+z^{-1})\\ & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\gamma(1+z) & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\delta(1+z^{-1})\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1/\xi & 0\\ 0 & \xi\end{bmatrix}$$

$$s_l^0 = x_{2l} \qquad d_l^0 = x_{2l+1}$$

$$d_l^1 = d_l^0 + \alpha(s_l^0 + s_{l+1}^0)$$

$$s_l^1 = s_l^0 + \beta(d_l^1 + d_{l-1}^1)$$

$$d_l^2 = d_l^1 + \gamma(s_l^1 + s_{l+1}^1)$$

$$s_l^2 = s_l^1 + \delta(d_l^2 + d_{l-1}^2)$$

$$s_l = \xi \cdot s_l^2 \quad d_l = d_l^2 / \xi \qquad \varsigma = 1.230174105$$

说明: JPEG2000中C语言实现模块中尺度变换是：

$s = s/\varsigma_1$ $\varsigma_1 =$ 1.23017410558578；

$d = d/\varsigma_2$ ς_2 = 1.62578613134411

Lena图像实验:

1.842 $\longrightarrow$ 2.938

课后预习

- 可分离小波变换算法实现的问题与讨论.doc（可从我实验室网上下载）