

第四章 小波变换的实现技术

- **Mallat**算法
- 多孔算法
- 小波变换的提升实现

Mallat算法的实现

$$\begin{cases} a^{j-1} = D(a^j * \tilde{h}) \\ d^{j-1} = D(a^j * \tilde{g}) \end{cases} \quad a^j = (Ua^{j-1}) * h + (Ud^{j-1}) * g$$

卷积法实现小波变换在实际中具有广泛的应用。

另一种实现方法：矩阵法

如何理解小波变换后的低频部分和细节部分的数据量与输入序列的相同,而且可以实现原序列的完全重构?

对无限信号序列成立!

问题:

在实际应用中,所处理的都是有限长信号,在这种情况下,如何实现信号的精确重构?

问题:

在实际应用中，所处理的都是有限长信号，在这种情况下，如何实现信号的精确重构？

解决方法:

1. 构造区间上的小波；
2. 对一般的小波基可以通过边界延拓的方法，增加原始信号的长度，将边界延拓到原信号之外，以保证原始信号的分解与重构是精确实现的。

常用的边界处理方法:

- 零延拓 $\cdots, 0, s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, 0, 0, \cdots$
- 周期延拓 $\cdots, s_{n-1}, s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, s_0, \cdots$
- 周期对称延拓法 $\cdots, s_{n-2}, s_{n-1}, \cdots, s_2, s_1, s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, s_{n-2}, \cdots, s_1, s_0, s_1, \cdots$
 $\cdots, s_{n-2}, s_{n-1}, s_{n-1}, \cdots, s_2, s_1, s_0, s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, s_{n-1}, s_{n-2}, \cdots, s_1, s_0, s_0, s_1, \cdots$
- 光滑常数延拓法 $\cdots, s_0, s_0, s_0, s_1, s_2, \cdots, s_{n-1}, s_{n-1}, s_{n-1}, s_{n-1}, \cdots$
- 平滑延拓延拓法 沿着信号两端的导数方向延拓

问题: 设信号长度为 n , 滤波器的长度为 l , 那么信号左右最少需要延拓多少个即可实现精确重构?

设信号长度为 n , 滤波器的长度为 l , 则每次分解只要在信号的左右两端延拓 len 个元素即可. 这里 len 为 $l/2$ 的上取整. 延拓后的信号的长度为 $n+2*len$.

- 零延拓 $0, \dots, 0, s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, 0, \dots, 0$
- 周期延拓 $s_{n-len}, \dots, s_{n-1}, s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_0, s_1, s_2, \dots, s_{len-1}$
- 周期对称延拓法 $s_{len}, \dots, s_2, s_1, s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_{n-len-1}$
 $s_{len-1}, \dots, s_2, s_1, s_0, s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_{n-1}, s_{n-2}, \dots, s_{n-len}$
- 光滑常数延拓法 $s_0, \dots, s_0, s_1, s_2, \dots, s_{n-1}, s_{n-1}, \dots, s_{n-1}$

参考资料: 教材参考文献7, 第89页。 **思考练习题:** 如何给出重构的严格证明?

设原始信号长为 m , 滤波器长为 l , 则延拓总长为 $l-1$ 即可。可采用左、右、两端三种不同的方式。↵

↵

1) 两端同时延拓: ↵

Case 1: 当 l 为奇数时, 每端延拓长度为 $\lfloor l/2 \rfloor$ (下取整函数); ↵

Case 2: 当 l 为偶数时, 一端延拓长度为 $l/2$; 另一端延拓长度为 $l/2-1$ ↵

↵

2) 左端延拓 $l-1$ 个 ↵

3) 右端延拓 $l-1$ 个 ↵

↵

具体采用何种延拓方式, 与具体的应用相关。↵

↵

讨论: 以上的理解是否存在不足? ↵

↵

另外, 对上述不同的延拓方式, 如何进行截取操作? ↵

Mallat算法的Matlab实现

- dwt()

`[cA,cD] = dwt(X,'wname')`

`[cA,cD] = dwt(X,'wname','mode',MODE)`

`[cA,cD] = dwt(X,Lo_D,Hi_D)`

`[cA,cD] = dwt(X,Lo_D,Hi_D,'mode',MODE)`

X 的长度为 lx , 滤波器的长度为 lf

对于周期延拓方式, **cA**, **cD**的长度均为 $\lceil lx/2 \rceil$

对于其他延拓方式, **cA**, **cD**的长度均为 $\lfloor (lx+lf-1)/2 \rfloor$

使用注意事项: 要求滤波器的长度相同 (可通过补零实现)。

- **idwt()**

$X = \text{idwt}(cA, cD, Lo_R, Hi_R)$

$X = \text{idwt}(cA, cD, Lo_R, Hi_R, 'mode', MODE)$

对于周期延拓方法, $lx = 2 \cdot la$

对于其他延拓方式, $lx = 2 \cdot la - lf + 2$

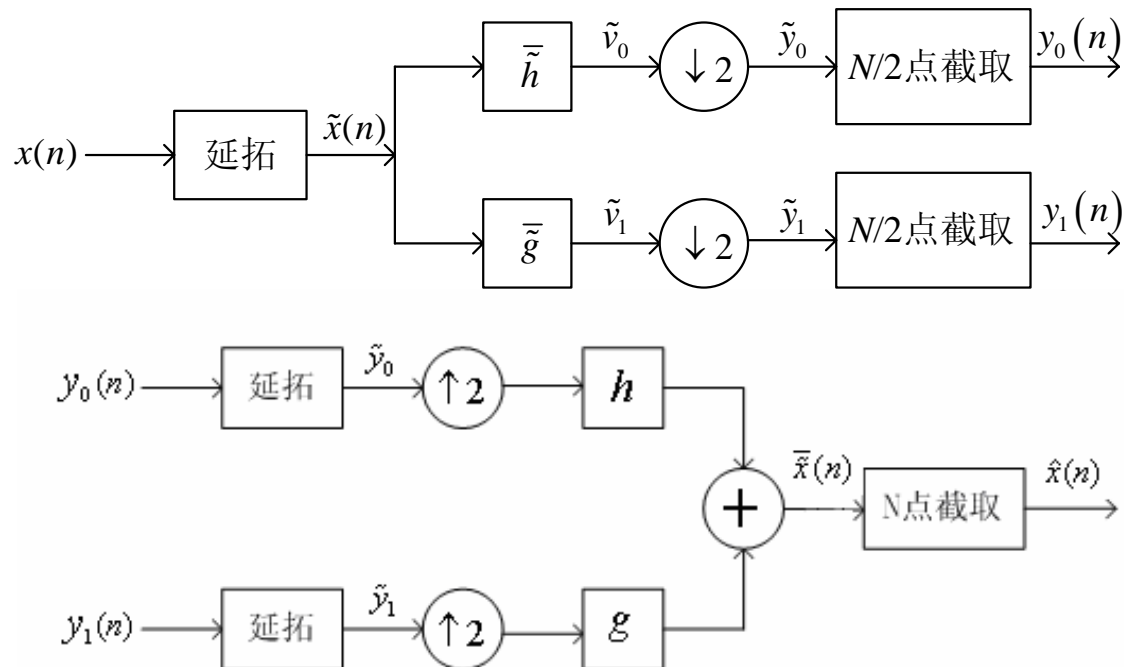
建议大家借助Matlab对一个长度8的信号用db2做实验分析.

Mallat算法的实现**dwt()**直接用于数据压缩如何?

数据压缩应用的特点与要求: 一般要求小波分解后低频与高频信号的长度不超过原始信号的长度。

以上分析表明, **dwt()**实现很难满足这个要求, 为什么?

具有延拓功能的二带分析/综合系统



我们希望这种系统，既满足完全重构条件，又不增加信号的数据量。在一般情况下，采用所提出的各种延拓方法，具有延拓功能的二带分析/综合系统很难保证在小波分解时不丢失信息，从而难以实现信号的完全重构。

问题: 在什么情况下,能够确保完全重构?

问题: 在什么情况下,能够确保完全重构?

在一些特殊情况下也可实现信号的完全重构。

如当所研究的信号/函数具有周期性时,则采用周期延拓可实现信号/函数的精确重构;

当采用具有某种对称性的双正交小波滤波器时,合理选择延拓方法,可以实现信号的完全重构。如对第三章中给出的具有对称性的双正交小波滤波器,采用对称周期延拓可实现完全重构。详细分析可参考 Wavelet Image and Video Compression,1998年出版: Symmetric Extension Transforms,83-91。此外,有一篇中文论文作为课外阅读资料供参考。

用小波处理函数/信号的基本步骤

用小波处理信号 $f(t)$ 的基本过程包括:

1. 初始化
2. 小波变换
3. 小波系数处理
4. 小波逆变换 (可选)

已知 ϕ 和 ψ 是正交尺度函数与小波, 则用小波处理信号 $f(t)$ 的基本过程包括:

- 初始化

设信号 $f(t)$ 在最高初始分辨率级 J 下的光滑逼近为 $P_J f(t) \in V_J$

记 $P_J f(t) = f_J(t)$, 则有 $f_J(t) = \sum_k c_k^J \phi_{J,k}(t)$ 。其中,

$$c_k^J \approx 2^{-J/2} f(k/2^J)$$

可以看出,这本质上是一个信号采样问题.不同的应用决定了不同的采样率.如声音信号,需要捕捉到20kHz频率的信号.此时的采样率应为40kHz.

Nyquist 抽样率和 Shannon 采样定理

定义： 若存在常数 $\Omega > 0$ ，使得

$$\hat{f}(\omega) = 0, |\omega| > \Omega$$

则函数 f 称为频率带限信号。当 Ω 是使上式成立的最小频率时，自然频率 $\nu = \frac{\Omega}{2\pi}$ 称为

Nyquist 频率， $2\nu = \frac{\Omega}{\pi}$ 称为 Nyquist 抽样率。

下面给出著名的 Shannon 采样定理（证明略）：

假设 $\hat{f}(\omega)$ 是分段光滑且连续的，而且对于某一固定正常数 Ω ，当 $|\omega| > \Omega$ 时， $\hat{f}(\omega) = 0$ ，则 $\hat{f}(\omega)$ 的逆 Fourier 变换 f 可由其在 $t_j = j\pi / \Omega, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ 处的采样值确定，更确切地说，有下式成立：

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(j\pi / \Omega) \frac{\sin(\Omega t - j\pi)}{\Omega t - j\pi}$$

- 小波分解

$$c^J \longrightarrow \{c^0, d^0, d^1, \dots, d^{J-1}\}$$

递归分解达到一定的分解级,输出小波系数(细节)和低频系数.

$$f_J(t) = f_0(t) + w_0(t) + w_1(t) + \dots + w_{J-1}(t)$$

$$f_0(t) = d_0^0 \phi_{0,0}(t) = d_0^0 \phi(t) \quad w_j(t) = \sum_{k \in Z} d_k^j \psi_{j,k}(t) \quad , j = 0, 1, \dots, J-1$$

顺便指出,我们可以根据需要控制分解的级数,不一定到达j=0级.

- 小波系数处理

$$\{c^0, d^0, d^1, \dots, d^{J-1}\} \longrightarrow \{\tilde{c}^0, \tilde{d}^0, \tilde{d}^1, \dots, \tilde{d}^{J-1}\}$$

压缩信号、信号滤波或去噪、信号奇异性检测、信号融合等

- 小波重构

$$\{\tilde{c}^0, \tilde{d}^0, \tilde{d}^1, \dots, \tilde{d}^{J-1}\} \longrightarrow \tilde{c}^J \longrightarrow \tilde{f}_J(t)$$

有些应用如信号奇异性检测等不需要恢复原信号。

类似地，我们可以为离散信号的分解与重构找到根据。

例4.1

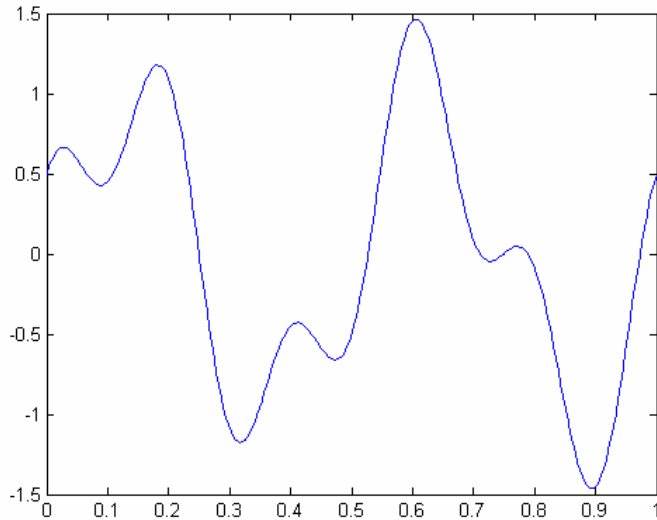
$f(t) = \sin(4\pi t) + \frac{1}{2}\cos(10\pi t), 0 \leq t \leq 1$ 将该信号离散化为 2^8 ?

个采样值，相应的逼近信号记为 $f_8(t)$ 。用**Haar**小波进行分解，

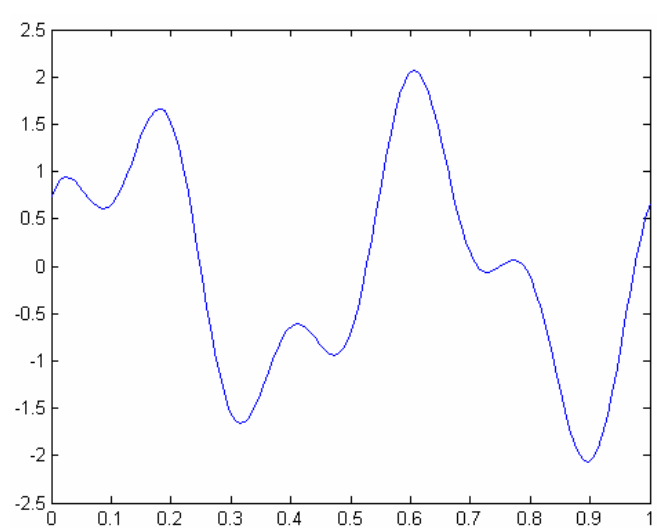
画出 $f_7(t)$ $f_6(t)$ $f_5(t)$ 的图形。

$f_8(t) = P_8 f(t) \in V_8$	$f_8(t) = \sum_k c_k^8 \phi_{8,k}(t)$	$2^{8/2} c_k^8 \approx f(k/2^8)$	$f(k/2^8) = b_k^8$
$f_8(t) = f_7(t) + d_7(t)$	$f_7(t) = \sum_k c_k^7 \phi_{7,k}(t)$	$2^{7/2} c_k^7 \approx f_7(k/2^7)$	
$= f_6(t) + d_6(t) + d_7(t)$	$f_6(t) = \sum_k c_k^6 \phi_{6,k}(t)$	$2^{6/2} c_k^6 \approx f_6(k/2^6)$	
$= f_5(t) + d_5(t) + d_6(t) + d_7(t)$	$f_5(t) = \sum_k c_k^5 \phi_{5,k}(t)$	$2^{5/2} c_k^5 \approx f_5(k/2^5)$	

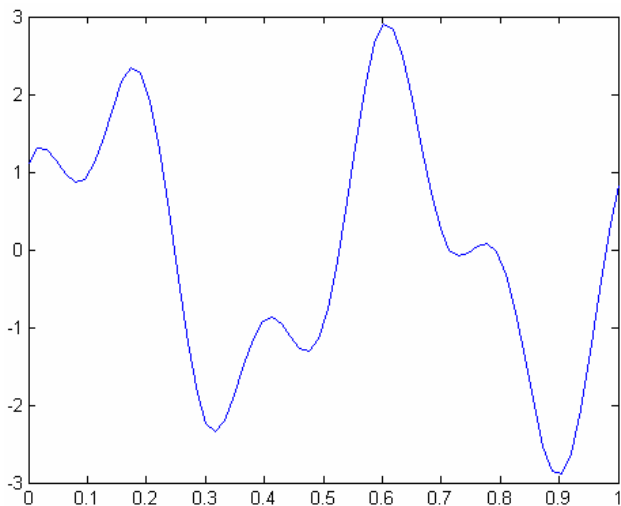
b_k^8 的三级多分辨逼近信号为 b_k^7, b_k^6, b_k^5 思考完成做图的方法与步骤?



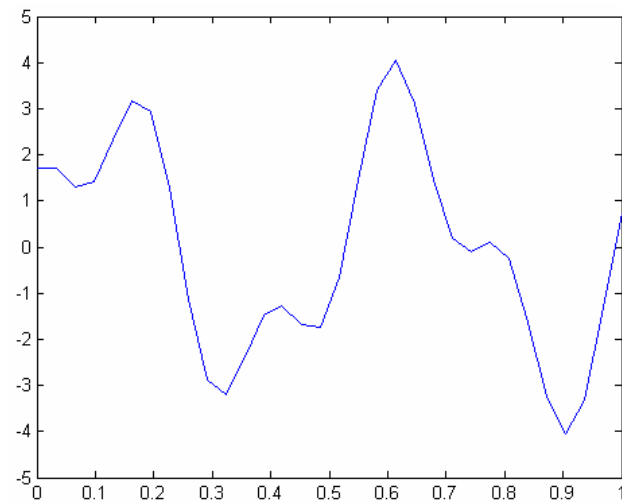
$f_8(t)$



$f_7(t)$



$f_6(t)$



$f_5(t)$

Matlab中 直接用 b_k^8 的低频系数 b_k^7, b_k^6, b_k^5 做图

以上方法存在什么问题？

c_k^8 的三级多分辨逼近信号为 c_k^7, c_k^6, c_k^5

$2^{8/2} c_k^8$ 的三级多分辨逼近信号为 $2^{8/2} c_k^7, 2^{8/2} c_k^6, 2^{8/2} c_k^5$

$$b_k^8 \approx 2^{8/2} c_k^8$$

$$b_k^7 \approx 2^{8/2} c_k^7$$

$$b_k^6 \approx 2^{8/2} c_k^6$$

$$b_k^5 \approx 2^{8/2} c_k^5$$

$$2^{7/2} c_k^7 \approx f_7(k/2^7)$$

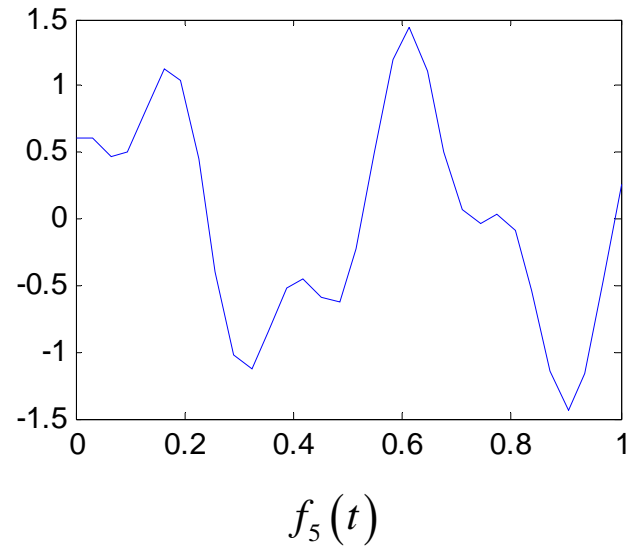
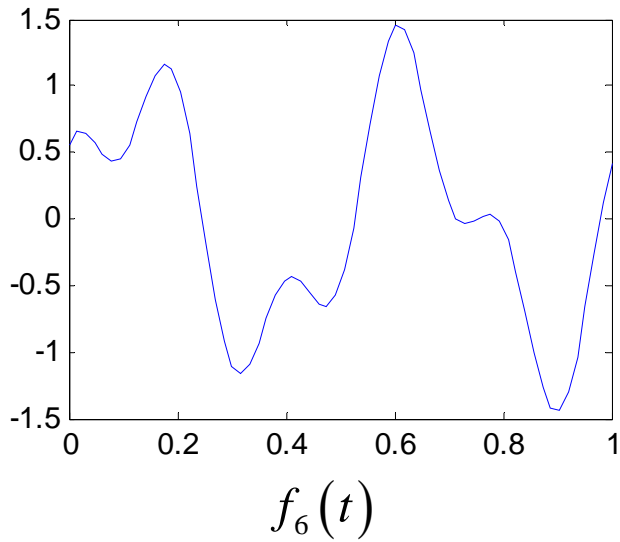
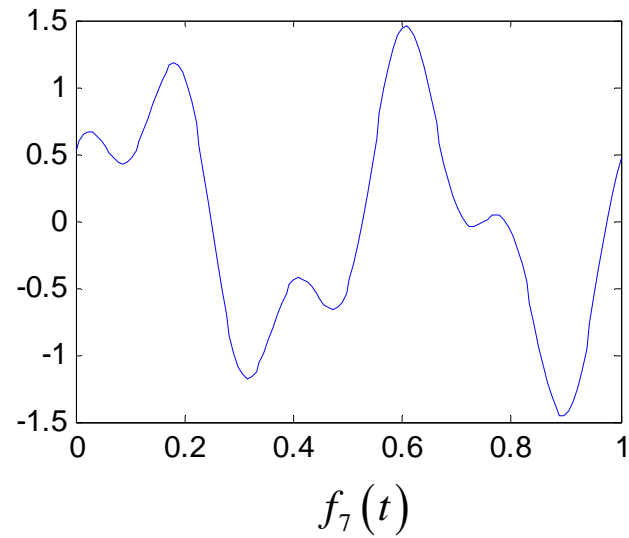
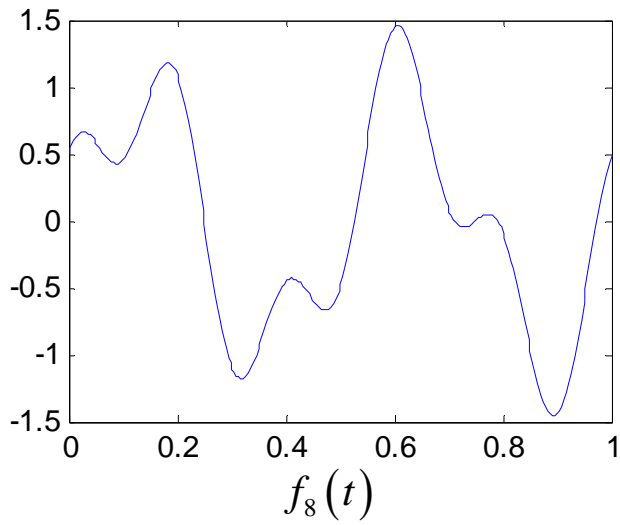
$$f_7(k/2^7) \approx \frac{1}{\sqrt{2}} b_k^7$$

$$2^{6/2} c_k^6 \approx f_6(k/2^6)$$

$$f_6(k/2^6) \approx \frac{1}{(\sqrt{2})^2} b_k^6 = \frac{1}{2} b_k^6$$

$$2^{5/2} c_k^5 \approx f_5(k/2^5)$$

$$f_5(k/2^5) \approx \frac{1}{2\sqrt{2}} b_k^5$$



用修正后的低频系数正确做图.

思考

- 1. 以上分析了直接用 b_k^8 每个分辨级的低频系数做图与该级实际逼近信号之间的关系.

容易看出, 用 c_k^8 的三级多分辨逼近信号 c_k^7, c_k^6, c_k^5 做图更容易理解

$$2^{7/2} c_k^7 \approx f_7(k/2^7)$$

$$2^{6/2} c_k^6 \approx f_6(k/2^6)$$

$$2^{5/2} c_k^5 \approx f_5(k/2^5)$$

思考

2. 细节信号的理解问题

Matlab中用小波系数画出各高频信息的图形,它是否也反映出了相应分

辨级细节信号的大致形状?如 d_k^6 与 $d_6(t)$ 的关系.

猜测: 答案是否定的.

建议: 大家用一个比较简单的函数做个测试

例4.2

- 对同一个离散信号应用不同的小波变换以及**FFT**变换进行压缩的处理效果与分析。

已知例4.1中的离散信号 $\{b_k^8\} (k = 0, 1, \dots, 255)$

- 问题：**
- 1) 用**Haar**尺度函数和小波分解信号；
 - 2) 用**D4**尺度函数和小波分解信号；
 - 3) 用**FFT**变换分解信号。

令绝对值最小的**80%**和**90%**的（小波）系数为**0**对信号进行**压缩**，画出相应的重构信号的图形，并求出相应的**相对误差**。对各种变换的效果进行对比分析。

处理中的注意事项:

1. 由于低频系数表示信号的重要信息, 一般来说它们的幅值都比较大, 对重构信号有重要的影响. 因此, 在处理过程中需要保留.
2. 相对误差与均方差的计算公式

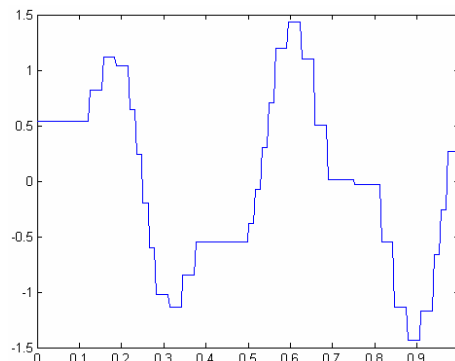
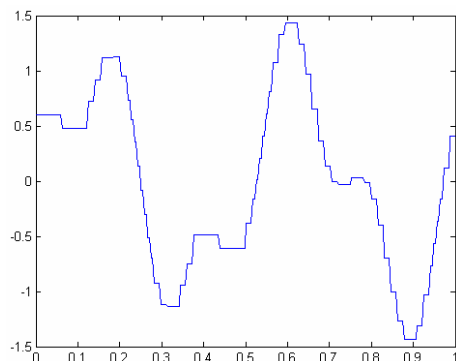
设信号 $x = (x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$, 其重构信号为 $\tilde{x} = (\tilde{x}_0, \tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_{n-1})$

则

$$\text{相对误差: } \frac{\|x - \tilde{x}\|_2}{\|x\|_2} = \frac{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |x_i - \tilde{x}_i|^2}}{\sqrt{\sum_{i=0}^{n-1} |x_i|^2}}$$

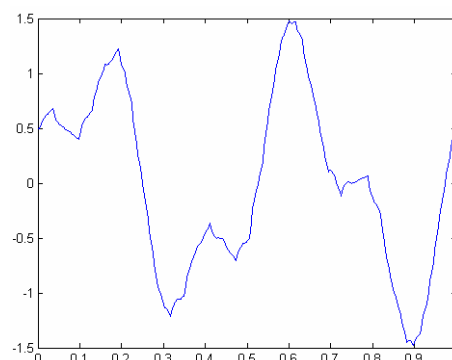
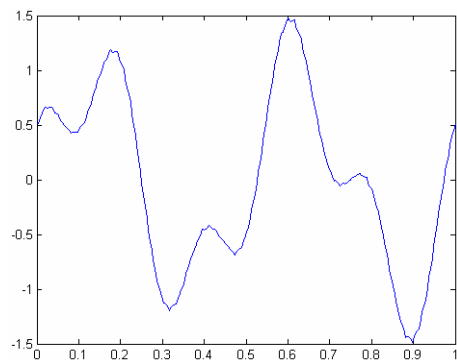
$$\text{均方根误差: } \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |x_i - \tilde{x}_i|^2} \quad \text{均方差: } \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} |x_i - \tilde{x}_i|^2$$

3. 在数据压缩应用中, 需要保持每层小波分解后的数据数量经适当截断保持不变。



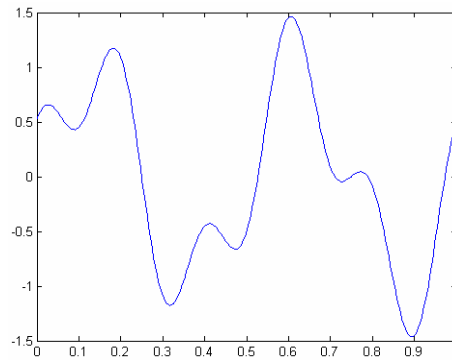
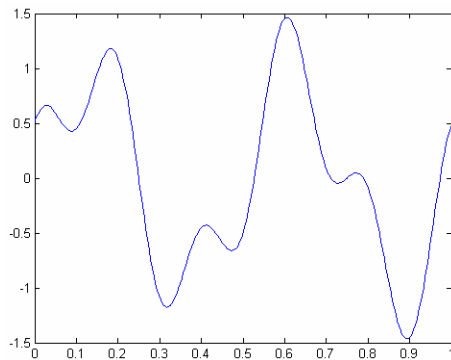
Haar小波

均方差:	0.7991	2.9559
相对误差:	0.0050	0.0185
取0比例:	80%	90%



D4小波

均方差:	0.0277	0.2159
相对误差:	0.00017	0.0014
取0比例:	80%	90%



FFT变换

均方差:	0.0012	0.0025
相对误差:	7.34×10^{-6}	1.59×10^{-5}
取0比例:	80%	90%

习题4.2

习题4.2 突变点检测

$$f(t) = \begin{cases} 0.37t + 1.37, & -1 \leq t < 2.8 \\ 1.58t - 2.03, & 2.8 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

对其进行256点等间隔取样,然后用具有2阶消失矩的Db小波分解.由j=8级开始检测,下一级是j=7.

参考方法1:

得到突变区间的方法: 根据小波变换高频系数的特点(在突变点处小波系数有突变),如果系数值的绝对值远小于其右边值的绝对值,则认为是左边界;如果系数值的绝对值远大于其左边值的绝对值,则认为是右边界。

习题4.2 突变点检测

参考答案1:

源代码check.m:

```
function [cd,min,max]=check(N)
```

```
%N为采样点数，cd为小波系数，min，max分别为突变点所在区间的  
左右边界
```

```
t=zeros(1,N);
```

```
for i=1:N
```

```
    t(i)=-1+(i/N)*(4+1); %等间隔时域256采样
```

```
f=zeros(1,N);
```

```
for i=1:N
```

```
    if(t(i)>=-1&t(i)<2.8) f(i)=0.37*t(i)+1.37;
```

```
    else if(t(i)>=2.8&t(i)<=4) f(i)=1.58*t(i)-2.03;
```

```
        else f(i)=0;
```

```
    end
```

```
end
```

```
end
```

```
%f存放N个采样值
```

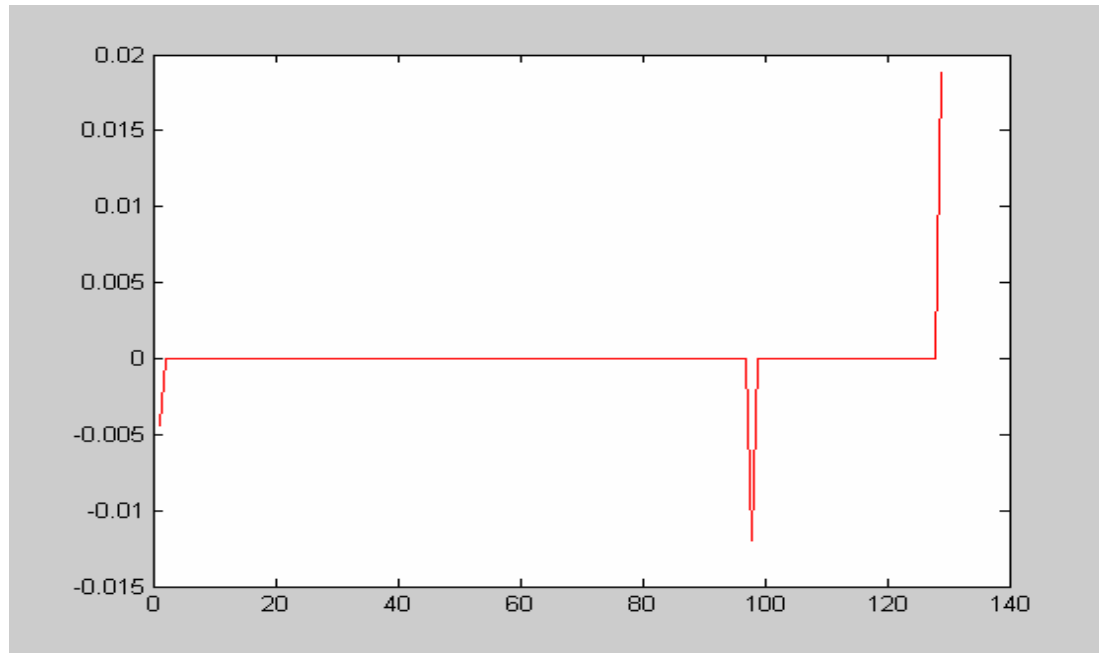
```
[ca,cd]=dwt(f,'db2','mode','sym');%用D4小波进行一级小波分解
n=size(cd,2);%小波系数的长度
for i=1:n-2 %因为在边界处有突变，不能循环到n-1
if(abs(cd(i+1))>(10^10)*abs(cd(i))) min=-1+(2*i/N)*(4+1);
%如果一个值的绝对值远小于其右值得绝对值，即为左边界（数量级为
10^10）
    end
if(abs(cd(i+1))<(10^(-10))*abs(cd(i))) max=-1+(2*(i+1)/N)*(4+1);
%如果一个值的绝对值远大于其右值得绝对值，即为右边界（数量级为
10^10）
    end
end
plot(cd,'r') %画出小波系数的波形
end
```

计算结果：

Min=2.7891， Max=2.8672

实际的突变点为2.8，所以区间符合要求。

小波系数波形如下：



习题4.2 突变点检测

参考答案2:

[A first course in wavelets with Fourier analysis, Albert Bogges, 2001]

(译本: 小波与傅立叶分析基础, 电子工业出版社, 2003)

对于 $j=7$, 有显著不同的小波系数是 $c_{7,97} \approx -0.01$. 其余的小波系数都是 10^{-14} 量级. 由于 $k=97$ 时相应的支撑区间为 $[2.79, 2.83]$. 所以, 奇异点就在这个区间.

该书的译者注: “实际上精确值为 $[2.7890625, 2.828125]$ ”

评述: 可以算出, 小波系数 $c_{7,97}$ 对应的采样点的实际位置为

$$-1+97*2*(4+1)/256=2.7890625$$

而 $-1+98*2*(4+1)/256=2.828125$

问题: 这种计算突变点的方法是否正确?

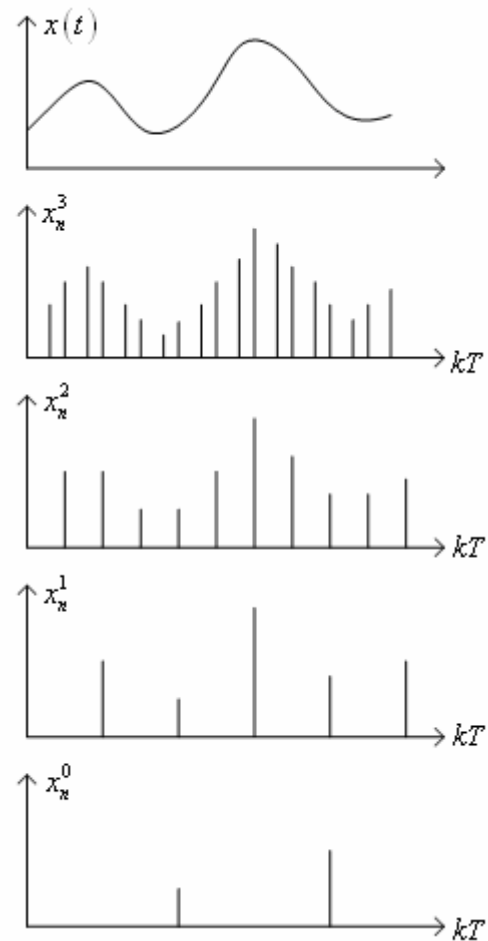
多孔算法 (平稳小波变换)

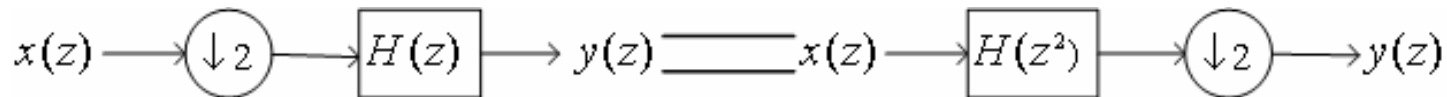
- 应用Mallat算法分析信号时存在的不足

问题:由于二抽样的缘故, 信号低频分量的数据量随小波分解次数的增大而不断减少, 以致难以看清原波形变化的全貌.

一种解决方法:

非抽样小波变换(平稳小波变换): 在任一分辨率下计算每个采样点的小波系数. 采用的实现技术是多孔算法.





z变换的等效易位性质

(注：将提供课外阅读材料给出其证明)

序列z变换的定义与性质:

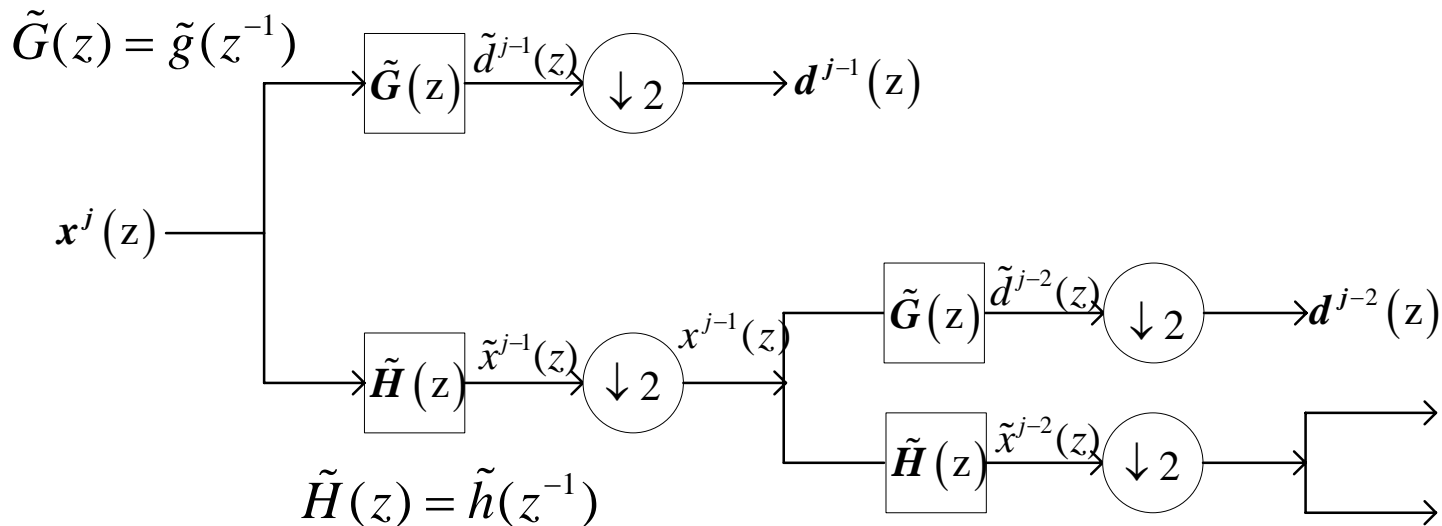
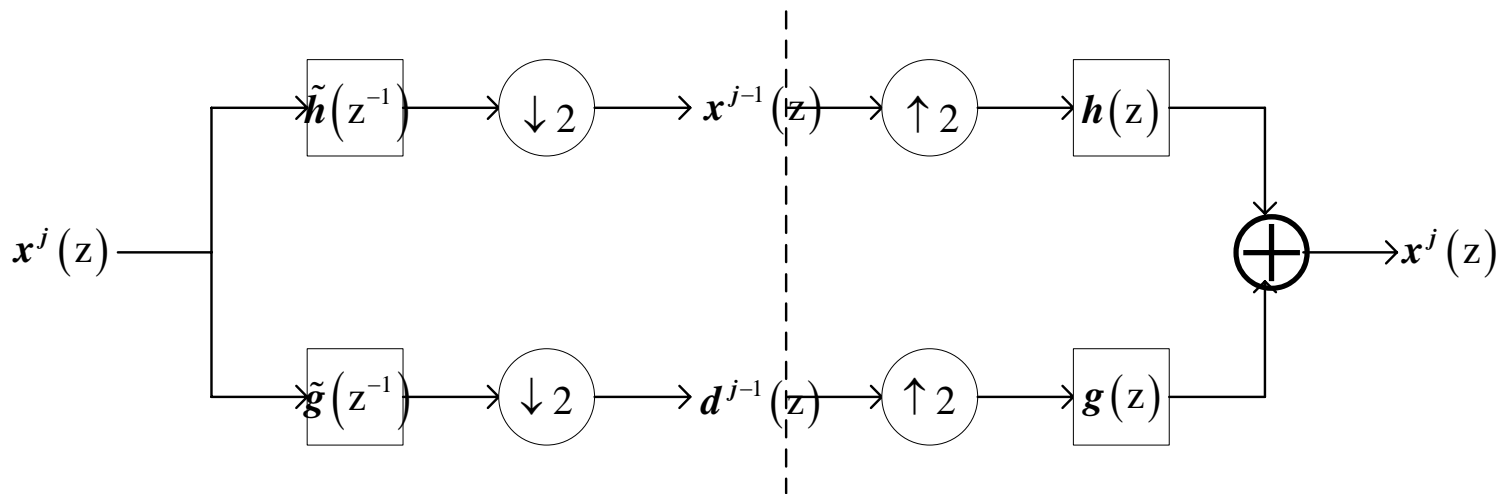
$$x = \{x_k\} \text{ 的z变换为: } x(z) = \sum_k x_k z^{-k}$$

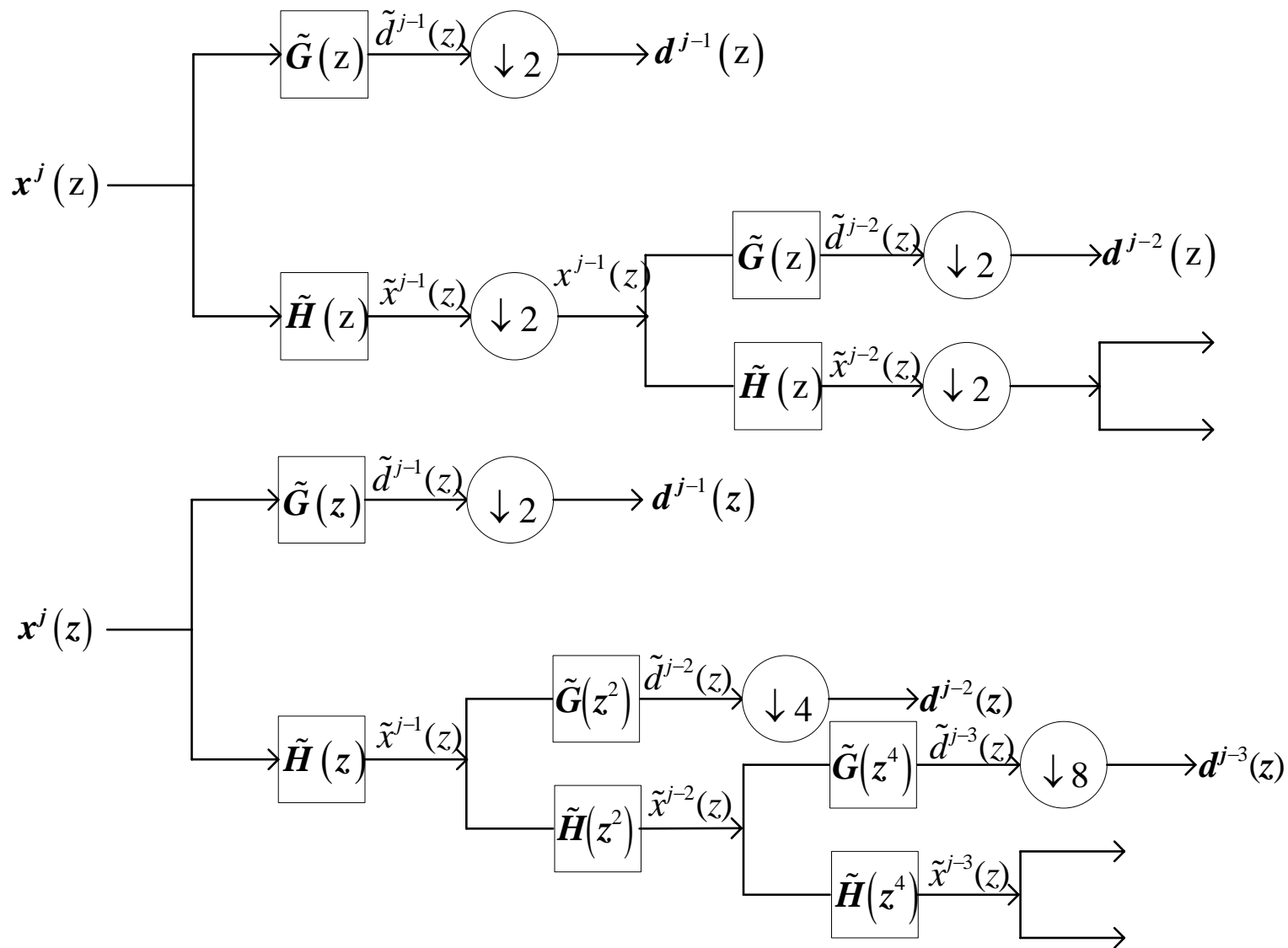
$x(z)$ 的二元下抽样表示序列 x 的二元下抽样的z变换.

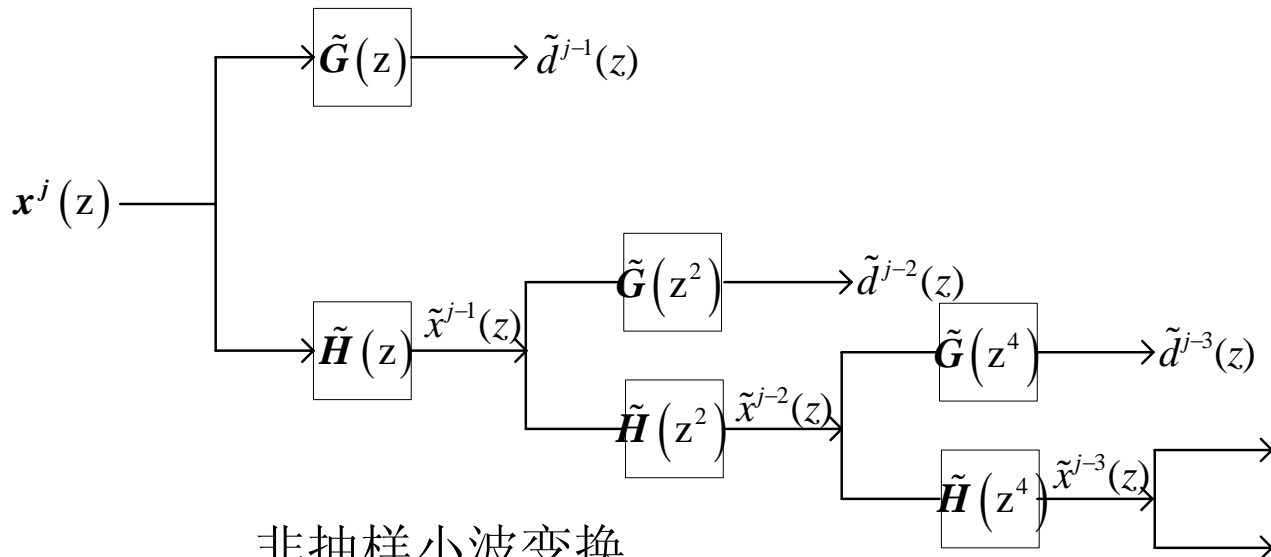
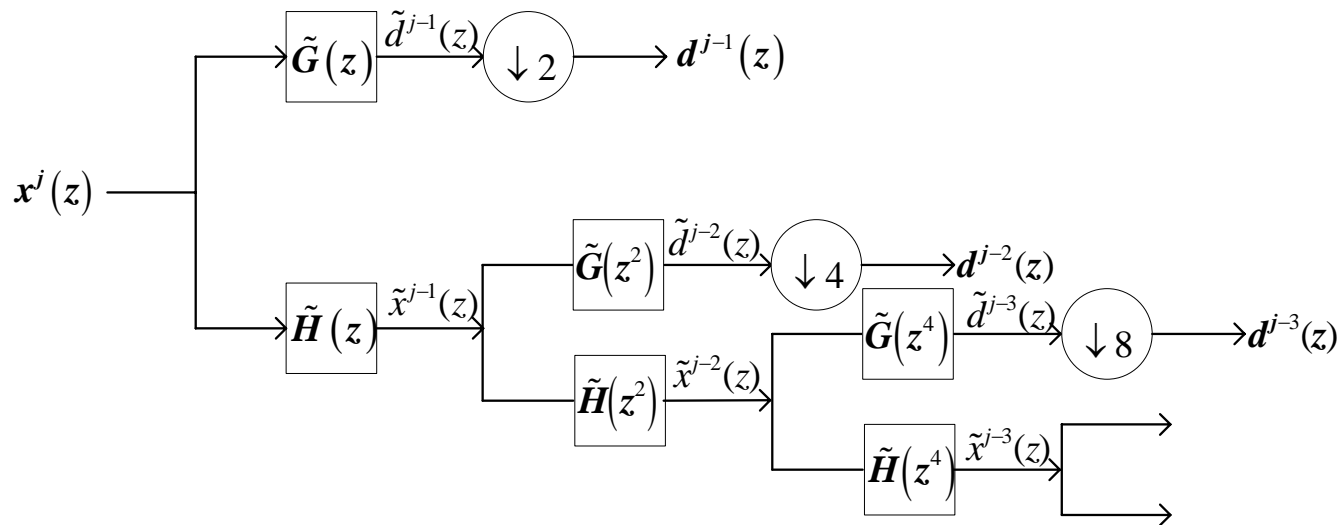
$$\text{对于 } a = \{a_k\}, b = \{b_k\}, \text{ 有 } (a * b)(z) = a(z)b(z)$$

$x(z)$ 的二元下抽样的二元下抽样等价于序列 x 的四元下抽样的z变换.

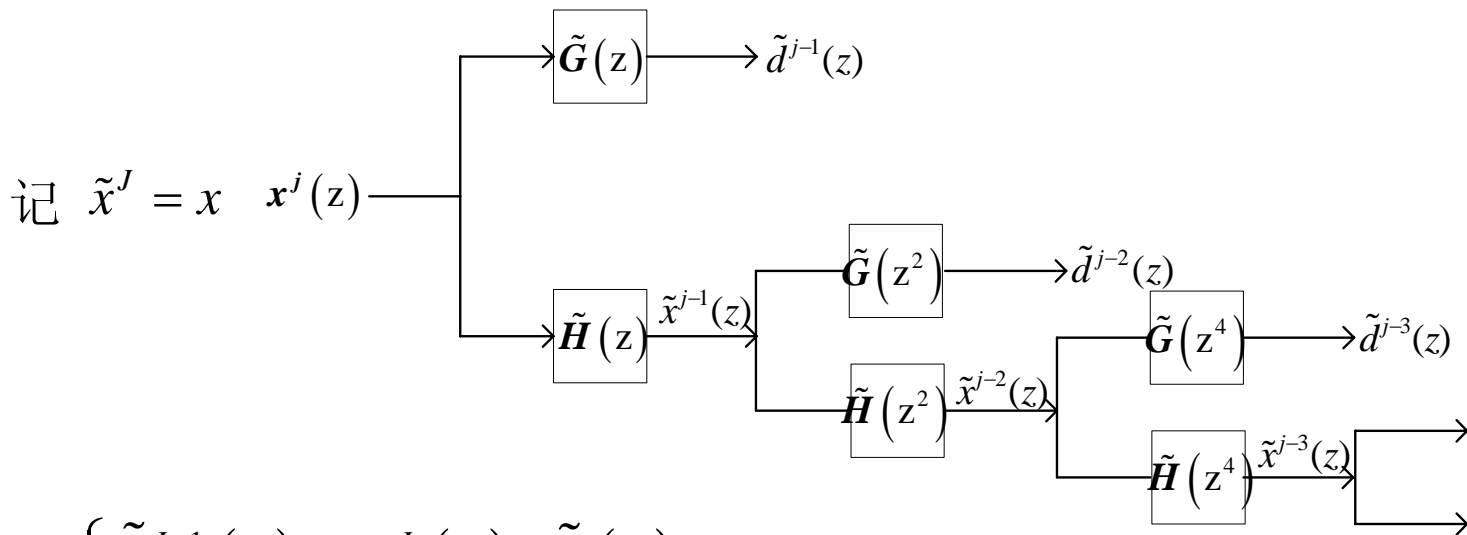
- 二通道Mallat算法 z 变换的滤波器形式







非抽样小波变换



$$\begin{cases} \tilde{d}^{J-1}(z) = \tilde{x}^J(z) \cdot \tilde{G}(z) \\ \tilde{x}^{J-1}(z) = \tilde{x}^J(z) \cdot \tilde{H}(z) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{d}^{J-2}(z) = \tilde{x}^{J-1}(z) \cdot \tilde{G}(z^2) \\ \tilde{x}^{J-2}(z) = \tilde{x}^{J-1}(z) \cdot \tilde{H}(z^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \tilde{d}^{J-3}(z) = \tilde{x}^{J-2}(z) \cdot \tilde{G}(z^4) \\ \tilde{x}^{J-3}(z) = \tilde{x}^{J-2}(z) \cdot \tilde{H}(z^4) \end{cases}$$

一般地,

$$\begin{cases} \tilde{d}^{j-1}(z) = \tilde{x}^j(z) \cdot \tilde{G}(z^{2^{j-1}}) \\ \tilde{x}^{j-1}(z) = \tilde{x}^j(z) \cdot \tilde{H}(z^{2^{j-1}}) \end{cases} \quad j = J, J-1, \dots, 2, 1$$

$$\begin{aligned} \tilde{G}(z) = \tilde{g}(z^{-1}) = \overline{\tilde{g}}(z) & \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{d}^{j-1}(z) &= \tilde{x}^j(z) \cdot \tilde{G}(z^{2^{J-j}}) \\ \tilde{x}^{j-1}(z) &= \tilde{x}^j(z) \cdot \tilde{H}(z^{2^{J-j}}) \end{aligned} \right. \quad j = J, J-1, \dots, 2, 1 \\ \tilde{H}(z) = \tilde{h}(z^{-1}) = \overline{\tilde{h}}(z) & \end{aligned}$$

$h(z^{2^j})$ 表示在 $\{h_n\}$ 的任意两点间插入 2^j-1 个零值所得到的滤波器, 记为 h^j , 的 z 变换, 即 $h^j(z) = h(z^{2^j})$

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{d}^{j-1}(z) &= \tilde{x}^j(z) \cdot \tilde{G}^{J-j}(z) \\ \tilde{x}^{j-1}(z) &= \tilde{x}^j(z) \cdot \tilde{H}^{J-j}(z) \end{aligned} \right. \quad \longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{d}^{j-1}(z) &= \tilde{x}^j(z) \cdot \overline{\tilde{g}}^{J-j}(z) \\ \tilde{x}^{j-1}(z) &= \tilde{x}^j(z) \cdot \overline{\tilde{h}}^{J-j}(z) \end{aligned} \right.$$

分解算法

$$\longrightarrow \quad \left\{ \begin{aligned} \tilde{d}^{j-1} &= \tilde{x}^j * \overline{\tilde{g}}^{J-j} \\ \tilde{x}^{j-1} &= \tilde{x}^j * \overline{\tilde{h}}^{J-j} \end{aligned} \right.$$

$$j = J, J-1, \dots, 2, 1$$

重构算法:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^j(z) &= \frac{1}{2} \left[\tilde{x}^{j-1}(z) h(z^{2^{J-j}}) + \tilde{d}^{j-1}(z) g(z^{2^{J-j}}) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[\tilde{x}^{j-1}(z) h^{J-j}(z) + \tilde{d}^{j-1}(z) g^{J-j}(z) \right]\end{aligned}$$

$$\tilde{x}^j = \frac{1}{2} \left(\tilde{x}^{j-1} * h^{J-j} + \tilde{d}^{j-1} * g^{J-j} \right) \quad j = 1, 2, \dots, J-1, J$$

讨论

1) 为何称为多孔算法?

在实现时要注意下标对齐等。

2) 与二通道Mallat算法之间的关系

3) 其它叫法

非抽取小波变换(**Undecimated Wavelet Transform**)

平稳小波变换(**Stationary Wavelet Transform**)

在**Matlab**小波工具箱中对应的函数: **swt()**, **iswt()**。

适用于正交或双正交小波滤波器。主要应用于数据统计分析等

注意, 推导过程不同。参考**Matlab**中的相关资料。

References:

Nason, G.P.; B.W. Silverman (1995), "The stationary wavelet transform and some statistical applications," Lecture Notes in Statistics, 103, pp. 281-299.

Coifman, R.R.; Donoho D.L. (1995), "Translation invariant denoising," Lecture Notes in Statistics, 103, pp. 125-150.

4) 二维的情况可参考**Matlab**中的函数**swt2()**说明. 主要应用于图像去噪等。

5) 计算复杂度为 $O(N \log N)$

部分作业

- 实现例4.2

要求：

- 1) 保留低频部分；
- 2) 每次分解时截取，保持数据量不增；
- 3) 采用均方差、均方根差、相对误差同时实验。