构造小波的几种不同策略

1. 利用多分辨分析构造正交小波

$$\varphi \to \phi \to h \to g \to \psi$$

2. 从滤波器序列出发构造尺度函数与小波

3. 构造双正交小波的提升方案（**lifting scheme**）

4. 构造小波滤波器的代数方法

- 双正交小波构造的基本思路

$$\tilde{h}, h, \tilde{g}, g \rightarrow \tilde{\phi}, \phi \rightarrow \tilde{\psi}, \psi$$

---

1) 在 $\tilde{\phi}, \phi, \tilde{\psi}, \psi$ 存在的情况下，

$\longrightarrow \tilde{h}, h, \tilde{g}, g$ 满足的必要条件

2) $\tilde{h}, h$ 满足什么条件下,对偶尺度函数与对偶小波存在?

假定 $\tilde{h}, h, \tilde{g}, g$ 是实系数滤波器。

- 必要条件（1）

$$\begin{cases} \phi(t) = \sqrt{2}\sum_k h_k \phi(2t-k) \\ \tilde{\phi}(t) = \sqrt{2}\sum_k \tilde{h}_k \tilde{\phi}(2t-k) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(t) = \sqrt{2}\sum_k g_k \phi(2t-k) \\ \tilde{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_k \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2t-k) \end{cases}$$

$\Rightarrow$

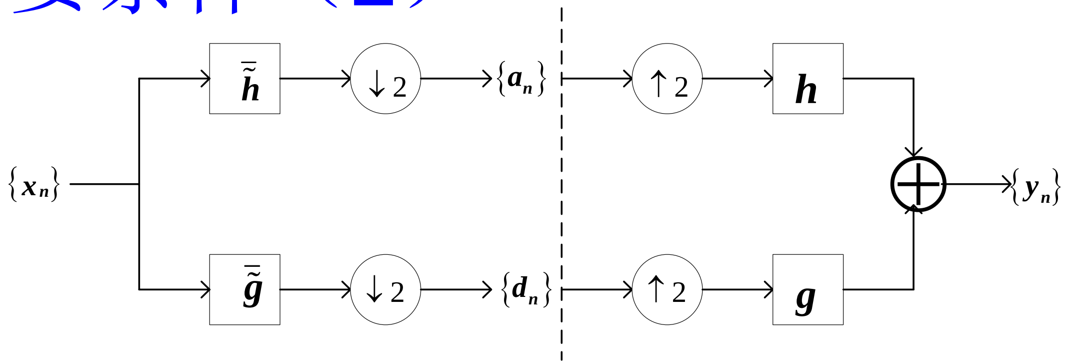
$$\begin{cases} \sum_k h_k = \sqrt{2} \\ \sum_k \tilde{h}_k = \sqrt{2} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sum_k g_k = 0 \\ \sum_k \tilde{g}_k = 0 \end{cases}$$

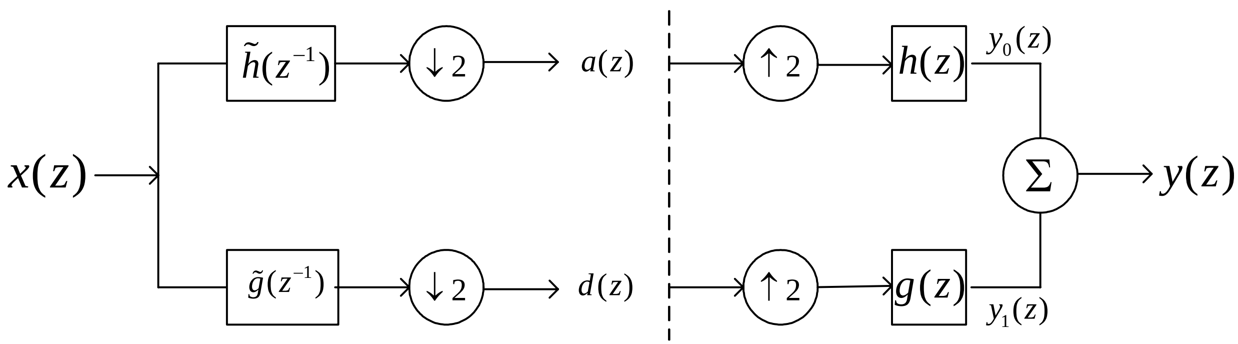
$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}} \qquad \hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{\tilde{h}}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{g}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}} \qquad \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{\tilde{g}}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}}$$

- 必要条件（2）

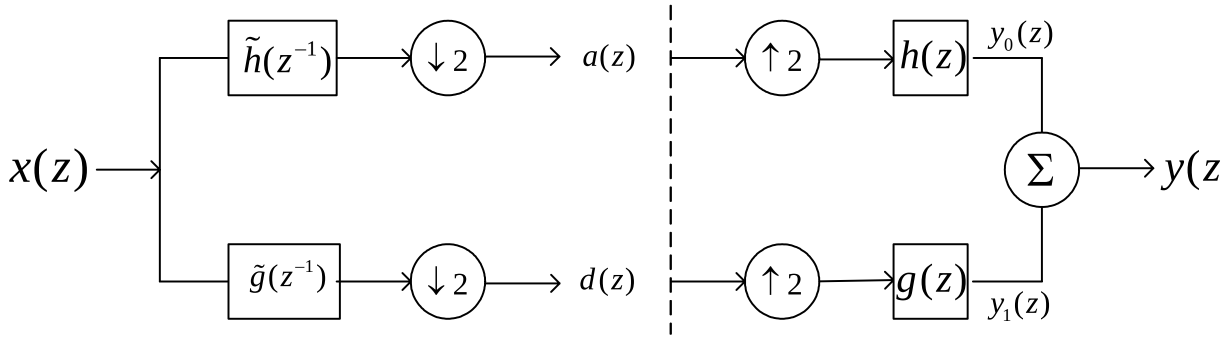


$$h(z)=\sum_n h_n z^{-n} \quad \bar{h}(z)=h(z^{-1}) \qquad (x*\bar{\tilde{h}})(z)=x(z)\bar{\tilde{h}}(z)=x(z)\tilde{h}(z^{-1})$$



$$a(z)=\frac{1}{2}\left[\tilde{h}(z^{-1/2})x(z^{1/2})+\tilde{h}(-z^{-1/2})x(-z^{1/2})\right] \qquad y_0(z)=a(z^2)h(z)$$

$$d(z)=\frac{1}{2}\left[\tilde{g}(z^{-1/2})x(z^{1/2})+\tilde{g}(-z^{-1/2})x(-z^{1/2})\right] \qquad y_1(z)=d(z^2)g(z)$$



$$
\begin{aligned}
y(z) &= y_0(z) + y_1(z) \\
&= \frac{1}{2}[\tilde{h}(z^{-1})h(z) + \tilde{g}(z^{-1})g(z)]x(z) + \frac{1}{2}[\tilde{h}(-z^{-1})h(z) + \tilde{g}(-z^{-1})g(z)]x(-z)
\end{aligned}
$$

滤波器组对任何输入信号实现精确重构，当且仅当

$$
\begin{cases}
\tilde{h}(z^{-1})h(z) + \tilde{g}(z^{-1})g(z) = 2 \\
h(z)\tilde{h}(-z^{-1}) + g(z)\tilde{g}(-z^{-1}) = 0
\end{cases}
$$

这是两通道滤波器组完全重构条件，即PR（Perfect Reconstruction）条件

若 $\Delta(z)=\tilde{h}(z^{-1})\tilde{g}(-z^{-1})-\tilde{h}(-z^{-1})\tilde{g}(z^{-1})\neq 0$

完全重构条件等价于如下重构条件：

$$h(z)\tilde{h}(z^{-1})+h(-z)\tilde{h}(-z^{-1})=2$$

$$h(z)=\frac{2}{\Delta(z)}\tilde{g}(-z^{-1}) \qquad g(z)=\frac{2}{\Delta(z)}\left[-\tilde{h}(-z^{-1})\right]$$

在实际应用中，我们常用有限长的滤波器，因此有必要讨论这种有限长滤波器的完全重构条件。

Laurent多项式：

当$\{x_n\}$是一个有限序列时，其 z变换x(z)称为Laurent多项式。

当 $h,g,\tilde{h},\tilde{g}$ 都是有限长滤波器时，根据定义，$\Delta(z)$

是z的Laurent多项式 。而且，由重构条件可知，它是一个奇数次的单项式 。

有限滤波器 $\tilde{h}, h, \tilde{g}, g$ 的完全重构条件是

$$\begin{cases} h(z)\tilde{h}(z^{-1}) + h(-z)\tilde{h}(-z^{-1}) = 2 \\ \tilde{g}(z) = -z^{-1}h(-z^{-1}) \\ g(z) = -z^{-1}\tilde{h}(-z^{-1}) \end{cases}$$

$\Updownarrow$ 实滤波器

$$\begin{cases} \hat{h}(\omega)\hat{\tilde{h}}^{*}(\omega) + \hat{h}(\omega+\pi)\hat{\tilde{h}}^{*}(\omega+\pi) = 2 \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = -e^{-i\omega}\hat{h}^{*}(\omega+\pi) \\ \hat{g}(\omega) = -e^{-i\omega}\hat{\tilde{h}}^{*}(\omega+\pi) \end{cases}$$

（称滤波器 $\tilde{h}, h$ 是对偶的）

$\Updownarrow$ 命题3.2

$$\begin{cases} \sum_k h_k \tilde{h}_{k+2n} = \delta_{0,n} \\ \tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n} \\ g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n} \end{cases}$$

- 必要条件

有限长滤波器$\tilde{h}, h, \tilde{g}, g$ 使得尺度函数 $\tilde{\phi}, \phi$ 和对偶小波 $\tilde{\psi}, \psi$ 存在的必要条件是：

$$
\begin{cases}
\sum_k h_k \tilde{h}_{k+2n} = \delta_{0,n} \\
\sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\
\sum_k \tilde{h}_{2k} = \sum_k \tilde{h}_{2k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\
\tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n} \\
g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n}
\end{cases}
$$

- 双正交小波滤波器的约束条件

对于有限滤波器 $\tilde{h}, h$,称

$$\begin{cases} \sum_k h_k \tilde{h}_{k+2n} = \delta_{0,n} \\ \sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sum_k \tilde{h}_{2k} = \sum_k \tilde{h}_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

为双正交小波滤波器的基本约束条件 。

一般地，对于双正交小波滤波器，有 $h \neq \tilde{h}$

在实际应用中，通常需要构造具有对称性的滤波器，根据习题**3.5**可知，对称的双正交低通滤波器对应的尺度函数与小波也是对称的。一般地，

若 $\tilde{h}_n = \tilde{h}_{-n}, h_n = h_{-n}$ ，则称 $\tilde{h}, h$ 是关于**0**对称的。称

$$
\begin{cases}
\sum_k h_k \tilde{h}_{k+2n} = \delta_{0,n} \\
\sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\
\sum_k \tilde{h}_{2k} = \sum_k \tilde{h}_{2k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\
h_n = h_{-n} \\
\tilde{h}_n = \tilde{h}_{-n}
\end{cases}
$$

为关于**0**对称的双正交小波滤波器的约束条件。

约束条件求解实例：例3.8

$\tilde{h} = \{\tilde{h}_{-2}, \tilde{h}_{-1}, \tilde{h}_0, \tilde{h}_1, \tilde{h}_2\}$

$h = \{h_{-1}, h_0, h_1\}$

$\tilde{h}_{-1} = \tilde{h}_1 \quad \tilde{h}_{-2} = \tilde{h}_2 \quad h_{-1} = h_1$

$p_n = \sqrt{2}\,\tilde{h}_n \qquad q_n = \sqrt{2} h_n$

$\Rightarrow$

$$\begin{cases} p_0 q_0 + 2 p_1 q_1 = 2 \\ p_2 q_0 + p_1 q_1 = 0 \\ p_0 + 2 p_2 = 1 \\ 2 p_1 = 1 \\ q_0 = 1 \\ 2 q_1 = 1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

$$p_0 = \frac{3}{2}, p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = -\frac{1}{4}, q_0 = 1, q_1 = \frac{1}{2}$$

$$\tilde{h} = \{-\frac{1}{4\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{3}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}, -\frac{1}{4\sqrt{2}}\}$$

$$h = \{\frac{1}{2\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{2\sqrt{2}}\}$$

小波滤波器的几种常用记法：

- 滤波器名称，如Haar滤波器，Daubechies滤波器等。
- $(N, \tilde{N})$：N 是 $\tilde{\psi}$ 的消失矩数，$\tilde{N}$是 ψ 的消失矩数。
- $(l_a - l_s)$： l_a 是分析滤波器 $\tilde{h}$ 的长度；l_s是综合滤波器 h 的长度。

按照以上记号,上述构造的滤波器称为（**5-3**）小波滤波器 **.** 在**JPEG2000**中用做无损图像压缩的默认滤波器**.**

例3.9

$$\tilde{h}=\{\tilde{h}_{-4},\tilde{h}_{-3},\tilde{h}_{-2},\tilde{h}_{-1},\tilde{h}_{0},\tilde{h}_{1},\tilde{h}_{2},\tilde{h}_{3},\tilde{h}_{4}\}$$

$$h=\{h_{-3},h_{-2},h_{-1},h_0,h_1,h_2,h_3\}$$

$$\tilde{h}_{-i}=\tilde{h}_i \quad i=1,2,3,4$$

$$h_{-j}=h_j \quad j=1,2,3$$

$$p_n=\sqrt{2}\,\tilde{h}_n \qquad q_n=\sqrt{2}h_n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} p_0=1-2p_2-p_4 \\ p_1=\frac{1}{2}-p_3 \\ p_3=q_2\cdot\Delta \\ p_2=\frac{4q_2+1}{4(4q_2-1)} \\ q_0=1-2q_2 \\ q_1=\frac{1}{2}-q_3 \end{cases} \qquad \Delta=\frac{q_2+2p_2q_2}{2q_3-q_2}$$

$$q_2=-0.057554$$
$$q_3=-0.091272$$

$\Rightarrow$

$$\tilde{h}_0=0.8526972 \quad \tilde{h}_{\pm1}=0.3774027 \quad \tilde{h}_{\pm2}=-0.110624$$
$$\tilde{h}_{\pm3}=-0.0238493 \quad \tilde{h}_{\pm4}=0.0378288$$
$$h_0=0.7884863 \quad h_{\pm1}=0.418924 \quad h_{\pm2}=-0.0404898 \quad h_{\pm3}=-0.064539$$

（**9-7**）小波滤波器 **.**在**JPEG2000**中用做有损图像压缩的默认滤波器**.**

在实际应用中, 通常需要构造满足一定阶数消失矩的小波. 命题 **3.3** 给出了双正交小波消失矩与低通滤波器之间的关系.

由命题**3.3**可得出如下结论:

$\psi(t)$ 具有 $\tilde{p}$ 阶消失矩 $\Leftrightarrow$ $\hat{\tilde{h}}^{(k)}(\pi)=0, k=0,1,\cdots,\tilde{p}-1$

$\Leftrightarrow$ $\hat{\tilde{h}}(\omega)=\sqrt{2}(\frac{1+e^{-i\omega}}{2})^{\tilde{p}}\tilde{F}_0(e^{i\omega})$ $\quad \tilde{F}_0(e^{i\pi})\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $\tilde{h}(z)=\sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{\tilde{p}}\tilde{F}_0(z)$ $\quad \tilde{F}_0(-1)\neq 0$

$\tilde{\psi}(t)$具有 p 阶消失矩 $\Leftrightarrow$ $\hat{h}^{(k)}(\pi)=0, k=0,1,\cdots,p-1$

$\Leftrightarrow$ $\hat{h}(\omega)=\sqrt{2}(\frac{1+e^{-i\omega}}{2})^{p}F_0(e^{i\omega})$ $\quad F_0(e^{i\pi})\neq 0$

$\Leftrightarrow$ $h(z)=\sqrt{2}\left(\frac{1+z^{-1}}{2}\right)^{p}F_0(z)$ $\quad F_0(-1)\neq 0$

设 $h=\{h_n\}$ 和 $\tilde{h}=\{\tilde{h}_n\}$ 是关于**0**对称的对偶低通滤波器，其长度分别为

$2N+1$ 和 $2\tilde{N}+1$ ，则 可以证明**(见P86)**

$\tilde{\psi}(t)$具有 p 阶消失矩 $\Longleftrightarrow$ $\hat{h}^{(k)}(\pi)=0, k=0,1,\cdots,p-1$

$$\begin{cases} h_0-2h_1+2h_2-2h_3+\cdots+2(-1)^N h_N=0 \\ h_1(-1)+(-1)^2 2^l h_2+\cdots+(-1)^N N^l h_N=0,\ 0<l<p\text{且}l\text{为偶数} \end{cases}$$

ψ 具有 $\tilde{p}$ 阶消失矩 $\Longleftrightarrow$ $\hat{\tilde{h}}^{(k)}(\pi)=0, k=0,1,\cdots,\tilde{p}-1$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \tilde{h}_0-2\tilde{h}_1+2\tilde{h}_2-2\tilde{h}_3+\cdots+2(-1)^{\tilde{N}} \tilde{h}_{\tilde{N}}=0 \\ \tilde{h}_1(-1)+(-1)^2 2^k \tilde{h}_2+\cdots+(-1)^{\tilde{N}} \tilde{N}^k \tilde{h}_{\tilde{N}}=0,\ 0<k<\tilde{p}\text{且}k\text{为偶数} \end{cases}$$

综上所述, 构造具有 $\tilde{p}, p$ 阶消失矩的关于0对称的双正交小波 $\psi, \tilde{\psi}$ 的代数约束方程为:

$$
\begin{cases}
\sum_k h_k \tilde{h}_{k+2n} = \delta_{0,n} \\
\sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
\sum_k \tilde{h}_{2k} = \sum_k \tilde{h}_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\
h_n = h_{-n} \\
\tilde{h}_n = \tilde{h}_{-n}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\tilde{h}_0 - 2\tilde{h}_1 + 2\tilde{h}_2 - 2\tilde{h}_3 + \cdots + 2(-1)^{\tilde{N}} \tilde{h}_{\tilde{N}} = 0 \\
\tilde{h}_1(-1) + (-1)^2 2^k \tilde{h}_2 + \cdots + (-1)^{\tilde{N}} \tilde{N}^k \tilde{h}_{\tilde{N}} = 0,\ 0 < k < \tilde{p}\text{且}k\text{为偶数}
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
h_0 - 2h_1 + 2h_2 - 2h_3 + \cdots + 2(-1)^N h_N = 0 \\
h_1(-1) + (-1)^2 2^l h_2 + \cdots + (-1)^{\tilde{N}} N^l h_N = 0,\ 0 < l < p\text{且}l\text{为偶数}
\end{cases}
$$

思考练习题:

1. 求解具有**2,2**阶消失矩的**(5-3)**双正交低通滤波器**.**
2. 求解具有**4,4**阶消失矩的**(9-7)**双正交低通滤波器**.**

顺便指出**,** 例**3.8**中的**(5-3)**滤波器具有**2,2**阶消失矩**,** 在**Matlab**中用**bior2.2**表示**;**例**3.9**中的**(9-7)**滤波器具有**4,4**阶消失矩**,** 在**Matlab**中用**bior4.4**表示**.**

- 满足对称性要求的双正交小波的低通滤波器的长度关系

以上讨论了关于**0**对称的双正交小波滤波器，即 $\tilde{h}_n = \tilde{h}_{-n}, h_n = h_{-n}$

这时，$\tilde{h}, h$ 都是奇数长的滤波器，设其长度分别为 $\tilde{L}, L$ ，具体地

$\tilde{L} = 2\tilde{N} + 1, L = 2N + 1$ ，则可以证明，存在整数 $\alpha \in Z$，使得

$$\tilde{L} - L = 2\left(\tilde{N} - N\right) = 2\left(2\alpha - 2N - 1\right), \alpha \in Z$$

即 $\tilde{h}, h$ 长度之差一定是2的奇数倍。两者不可能等长。

进而，容易验证

$$\tilde{g}_k = \tilde{g}_{2-k}, g_k = g_{2-k}$$

因此，$\tilde{g}, g$ 也是偶对称序列。

从而，对应的尺度函数与双正交小波都是偶对称的函数。

问题：双正交对偶小波的消失矩的奇偶性如何？

- 满足对称性要求的双正交小波的低通滤波器的长度关系

若 $\tilde{h}_n = \tilde{h}_{1-n}, h_n = h_{1-n}$ ，则称之为关于**0.5**对称的双正交小波滤波器，

这时，$\tilde{h}, h$ 都是偶数长的滤波器，设其长度分别为 $\tilde{L}, L$ ，具体地

$\tilde{L} = 2\tilde{N}, L = 2N$ ，则可以证明，存在整数 $\alpha \in Z$ ，使得

$$\tilde{L} - L = 2\left(\tilde{N} - N\right) = 2\left(2\alpha - 2N\right) = 4\left(\alpha - N\right), \alpha \in Z$$

即 $\tilde{h}, h$ 长度之差一定是4的整数倍。两者等长是可能的。

进而，容易验证

$$\tilde{g}_k = -\tilde{g}_{1-k}, g_k = -g_{1-k}$$

因此，$\tilde{g}, g$ 都是反对称序列。

从而，对应的尺度函数是偶对称的，相应的双正交小波函数一定是反对称的。

问题：双正交对偶小波的消失矩的奇偶性如何？

思考题练习题:

3. 给出构造反对称的双正交小波的代数约束方程**.** 能否构造出一些例子**?**

4. 给出构造具有$\tilde{p}, p$阶消失矩的反对称的双正交小波 $\psi, \tilde{\psi}$ 的代数约束方程**.** 能否给出计算例子**?**

- 满足对称性要求的双正交小波的低通滤波器的长度关系

1. 对于有限长的实序列 $\tilde{h}, h$ ，满足以下反对称 条件的双正交低通滤波器不存在，为什么？

$$\tilde{h}_n = -\tilde{h}_{-n}, h_n = -h_{-n}$$

2. 对于有限长的实序列 $\tilde{h}, h$ ，满足以下反对称 条件的双正交低通滤波器不存在，为什么？

$$\tilde{h}_n = -\tilde{h}_{1-n}, h_n = -h_{1-n}$$

3. 对于有限长具有对称性的双正交小波的低通滤波器 $\tilde{h}, h$ ，可以证明，两者长度具有不同奇偶性的情况是不存在的。

理论问题:

所求得的 $\tilde{h}, h$ 必须能够使无穷乘积 $\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{\tilde{h}}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}}$ 和 $\prod_{j=1}^{\infty}\frac{\hat{h}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}}$ 收敛于 $L^2(R)$ 中的函数 $\hat{\phi}(\omega)$ 和 $\hat{\tilde{\phi}}(\omega)$。难以验证！

充分条件:

若 $\tilde{h}, h$ 满足: 基本约束条件 、对称条件、消失矩条件，则

$\tilde{h}, h$ 还需要满足什么条件，才能够使上述无穷乘积收敛？从而

使得构造出的滤波器 $\tilde{h}, h, \tilde{g}, g$ 是真正意义上的双正交小波

滤波器。

以对称性（线性相位）为前提条件，Cohen, Daubechies和Feauveau于1992年提出了一种构造紧支撑双正交小波的方法，简称CDF方法。

双正交小波滤波器的充分条件

$$\begin{cases} \sum_k h_k \tilde{h}_{k+2n} = \delta_{0,n} \\ \sum_k h_{2k} = \sum_k h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sum_k \tilde{h}_{2k} = \sum_k \tilde{h}_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n} \\ g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \hat{h}(\omega) = \sqrt{2}\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^p F_0(e^{i\omega}) \quad F_0(e^{i\pi}) \neq 0 \\ \hat{\tilde{h}}(\omega) = \sqrt{2}\left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2}\right)^{\tilde{p}} \tilde{F}_0(e^{i\omega}) \quad \tilde{F}_0(e^{i\pi}) \neq 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \max_{\omega\in R} \left| \prod_{i=1}^{p-1} F_0\left(2^i \omega\right) \right| < 2^p \\ \max_{\omega\in R} \left| \prod_{i=1}^{\tilde{p}-1} \tilde{F}_0\left(2^i \omega\right) \right| < 2^{\tilde{p}} \end{cases}$$

$\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{\tilde{h}}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}}$ 和 $\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}}$ 收敛于 $L^2(R)$ 中的函数 $\hat{\phi}(\omega)$ 和 $\hat{\tilde{\phi}}(\omega)$

$\phi, \tilde{\phi}$ 满足正交关系；

对于 $\begin{cases} \psi(t) = \sqrt{2}\sum_k g_k \phi(2t-k) \\ \tilde{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_k \tilde{g}_k \tilde{\phi}(2t-k) \end{cases}$

$\{\psi_{j,n}\}_{j,n\in Z}$ $\{\tilde{\psi}_{j,n}\}_{j,n\in Z}$ 双正交的**Riesz**基

若 $\operatorname{supp} h = [N_1, N_2]$ $\operatorname{supp} \tilde{h} = [\tilde{N}_1, \tilde{N}_2]$

则 $\operatorname{supp} \phi = [N_1, N_2]$ $\operatorname{supp} \tilde{\phi} = [\tilde{N}_1, \tilde{N}_2]$

$$\operatorname{supp} \psi = \left[\frac{N_1 - \tilde{N}_2 + 1}{2}, \frac{N_2 - \tilde{N}_1 + 1}{2}\right]$$

$$\operatorname{supp} \tilde{\psi} = \left[\frac{\tilde{N}_1 - N_2 + 1}{2}, \frac{\tilde{N}_2 - N_1 + 1}{2}\right]$$

- 双正交B样条小波的构造例子：例3.10

$p, \tilde{p}$	n	h_n	$\tilde{h}_n$
$p=2$ $\tilde{p}=4$	0 1,-1 2,-2 3,-3 4,-4	0.70710678118655 0.35355339059327	0.99436891104358 0.41984465132951 -0.17677669529664 -0.06629126073624 0.03314563036812
$p=3$ $\tilde{p}=7$	0,1 -1,2 -2,3 -3,4 -4,5 -5,6 -6,7 -7,8	0.53033008588991 0.17677669529664	0.95164212189718 -0.02649924094535 -0.30115912592284 0.03133297870736 0.07466398507402 -0.01683176542131 -0.00906325830378 0.00302108610126

- 双正交B样条小波的构造例子：例3.10

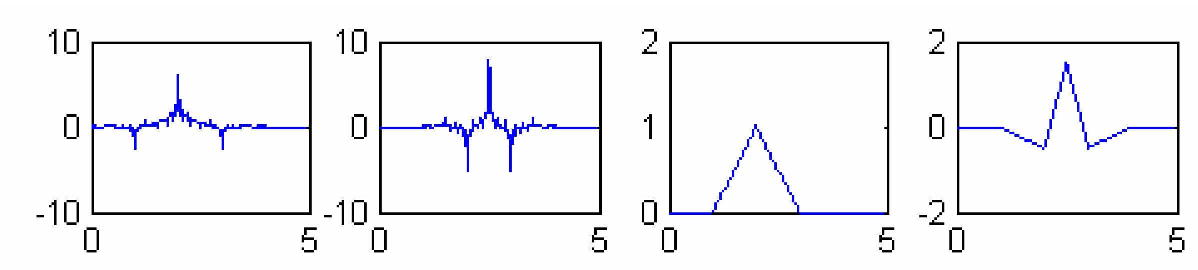
$p, \tilde{p}$	n	h_n	$\tilde{h}_n$
$p=4$ $\tilde{p}=4$	0 1,-1 2,-2 3,-3 4,-4	0.78848561640637 0.41809227322204 -0.04068941760920 -0.06453888262876 0	0.85269867900889 0.37740285561283 -0.11062440441844 -0.02384946501956 0.03782845554969

原始参考文献：

A. Cohen., et.al. ,Biorthogonal bases of compactly supported wavelets. Comm. On Pure and Appl. Math., 45, 485-560,1992

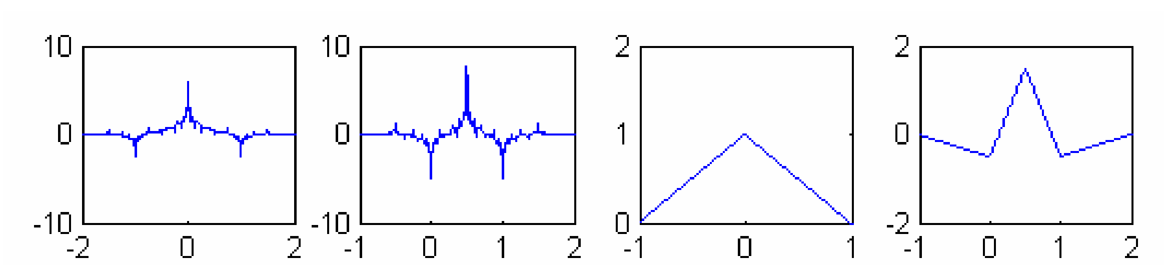
紧支撑双正交尺度函数与小波的做图

两种方法：wavefun(), upcoef()



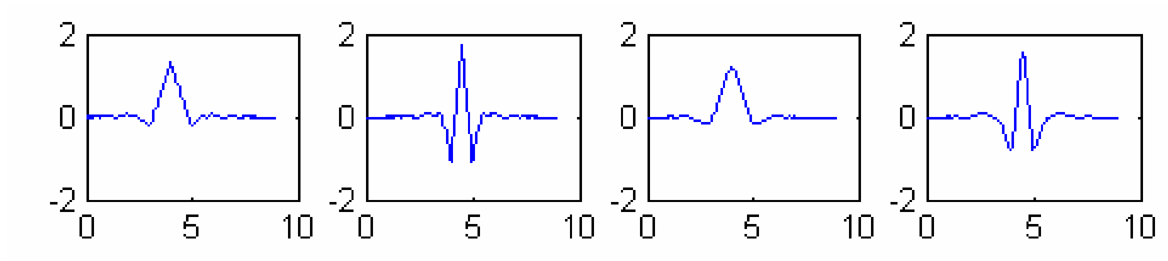
$\tilde{\phi}(t)$ $\tilde{\psi}(t)$ $\phi(t)$ $\psi(t)$

(未考虑精确支撑时的情况)



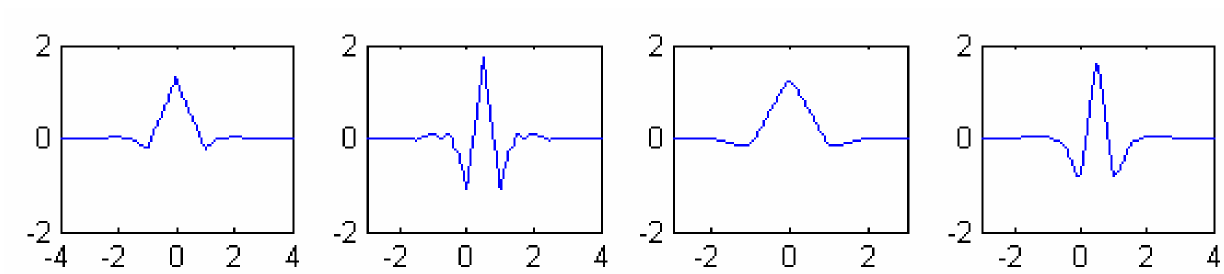
$\tilde{\phi}(t)$ $\tilde{\psi}(t)$ $\phi(t)$ $\psi(t)$

（**5-3**）小波滤波器对应的尺度函数和小波的图形



$\tilde{\phi}(t)$ $\tilde{\psi}(t)$ $\phi(t)$ $\psi(t)$

(未考虑精确支撑时的情况)



$\tilde{\phi}(t)$ $\tilde{\psi}(t)$ $\phi(t)$ $\psi(t)$

（**9-7**）小波滤波器对应的尺度函数和小波的图形

代数构造方法的判定条件

1) 一般求解方法**.** 分成两部分考虑**.**

2) 如何验证从代数约束方程求出的滤波器一定保证相应的无穷乘积收敛**?**

有没有对应的**Lawton**规则**?**尚需研究！！

目前的解决方法：验证以下条件成立即可。

$$\begin{cases} \max\limits_{\omega\in R}\left|\prod\limits_{i=1}^{p-1} F_0\left(2^i\omega\right)\right| < 2^p \\ \max\limits_{\omega\in R}\left|\prod\limits_{i=1}^{\tilde{p}-1} \tilde{F}_0\left(2^i\omega\right)\right| < 2^{\tilde{p}} \end{cases}$$

进一步的简化条件见下页说明。

$$\begin{cases} \max\limits_{\omega \in R} \left| \prod\limits_{i=1}^{p-1} F_0\left(2^i \omega\right) \right| < 2^p \\ \max\limits_{\omega \in R} \left| \prod\limits_{i=1}^{\tilde{p}-1} \tilde{F}_0\left(2^i \omega\right) \right| < 2^{\tilde{p}} \end{cases}$$

$$L = F_0^{\ 1} * F_0^{\ 2} * \cdots * F_0^{\ p-1} = \left\{ l_0, l_1, \cdots, l_{|L|-1} \right\}$$

$$\tilde{L} = \tilde{F}_0^{\ 1} * \tilde{F}_0^{\ 2} * \cdots * \tilde{F}_0^{\ \tilde{p}-1} = \left\{ \tilde{l}_0, \tilde{l}_1, \cdots, \tilde{l}_{|\tilde{L}|-1} \right\}$$

其中，h^j表示在h的任意相邻系数之间插入2^j-1个0得到的滤波器。

验证

$$\left| L\left(e^{i\omega}\right) \right|^2 = \left(\sum_{k=0}^{|L|-1} l_k \cos k\omega \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{|L|-1} l_k \sin k\omega \right)^2$$

$$\left| \tilde{L}\left(e^{i\omega}\right) \right|^2 = \left(\sum_{k=0}^{|\tilde{L}|-1} \tilde{l}_k \cos k\omega \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{|\tilde{L}|-1} \tilde{l}_k \sin k\omega \right)^2$$

在 $0 \sim 2\pi$ 上的最大值分别小于4^p 和 $4^{\tilde{p}}$ 即可 .

构造双正交小波的提升方案（lifting scheme）

- 提升是对完全重构滤波器的初步修正，用于改善小波性质。

我们知道，由满足如下条件的有限脉冲响应双正交滤波器$\left(\tilde{h}, h, \tilde{g}, g\right)$构造出双正交小波基。

$$\begin{cases} \hat{h}(\omega)\hat{\tilde{h}}^*(\omega)+\hat{h}(\omega+\pi)\hat{\tilde{h}}^*(\omega+\pi)=2 \\ \hat{\tilde{g}}(\omega)=-e^{-i\omega}\hat{h}^*(\omega+\pi) \\ \hat{g}(\omega)=-e^{-i\omega}\hat{\tilde{h}}^*(\omega+\pi) \end{cases}$$

命题（HERLEY, VETTERLI）令h和 $\tilde{h}$ 是支集有限的对偶滤波器。支集有限的滤波器 h^l 和 $\tilde{h}$ 对偶当且仅当存在一个有限滤波器 l ，使得

$$\hat{h}^l(\omega)=\hat{h}(\omega)+\hat{g}(\omega)\hat{l}^*(2\omega)$$

以上命题表明，如果 $\left(\tilde{h}, h, \tilde{g}, g\right)$ 是双正交的，那么我们可以构造一个新的双正交滤波器集$\left(\tilde{h}, h^{l}, \tilde{g}^{l}, g\right)$ ，其中，

$$\begin{aligned}
&\hat{h}^{l}(\omega)=\hat{h}(\omega)+\hat{g}(\omega)\hat{l}^{*}(2\omega)\\
&\hat{\tilde{g}}^{l}(\omega)=-e^{-i\omega}\hat{h}^{l*}(\omega+\pi)\\
&=-e^{-i\omega}\left[\hat{h}^{*}(\omega+\pi)+\hat{g}^{*}(\omega+\pi)\hat{l}(2\omega+2\pi)\right]\\
&=-e^{-i\omega}\hat{h}^{*}(\omega+\pi)-e^{-i\omega}\hat{g}^{*}(\omega+\pi)\hat{l}(2\omega)\\
&=\hat{\tilde{g}}(\omega)+\hat{\tilde{h}}(\omega)\hat{l}(2\omega)
\end{aligned}$$

通过l的选取改善滤波器的性质。进一步可参考Mallat著“信号处理的小波导引” 7.4.4节。（属于高难度内容）

作业

- 本次课件中“思考练习题”2，3，4任选一题。