

第3章 紧支撑小波基的构造

1. 构造紧支撑小波的重要意义
2. 构造（紧支撑）小波的几种不同策略
3. 尺度函数与小波函数的做图
4. 熟悉常用的**Daubechies**小波与双 正交小波实例

构造紧支撑小波的重要意义

- 分析**Haar, Shannon, Battle-Lemarie**小波的特点，可知构造紧支撑正交小波的重要性
- 可证明，对称的紧支撑的正交小波只有**Haar**小波，因而需要构造对称的紧支撑的双正交小波。

构造小波的不同策略

1. 利用多分辨分析构造正交小波

$$\varphi \rightarrow \phi \rightarrow h \rightarrow g \rightarrow \psi$$

2. 从滤波器序列出发构造尺度函数与小波

3. 构造双正交小波的提升方案 (**lifting scheme**)

4. 构造小波滤波器的代数方法

多分辨分析的性质

设尺度函数 ϕ 生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的多分辨分析 $\{V_j\}$

性质1:
$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_k h_k \phi(2t - k)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}} \right) \hat{\phi}(0)$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}} \right)$$

即 ϕ 由 h 唯一确定。

性质2: $\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是 V_0 标准正交基的充分必要条件是:

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \forall \omega \in [-\pi, \pi]$$

证明方法: 标准正交系 + 两尺度方程

$\{\phi(t-n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是标准正交系的充分必要条件是:

将
$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 1, \forall \omega \in \mathbb{R}$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \text{ 代入上式可得。}$$

性质3: $|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \forall \omega \in [-\pi, \pi]$

$$\iff \sum_k h_k h_{k+2n} = \delta_{0,n} \quad (\text{证明方法参见命题3.2})$$

性质4: $\sum_k h_k = \sqrt{2}$ 即 $\hat{h}(0) = \sqrt{2}$

证明方法: 标准正交系+两尺度方程 (见引理2.1的证明)

基本结论: 设正交尺度函数 ϕ 生成 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交多分辨分析 $\{V_j\}$

则两尺度序列 $\{h_k\}$ 满足以下条件:

$$1) \quad \sum_k h_k h_{k+2n} = \delta_{0,n} \iff |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2$$

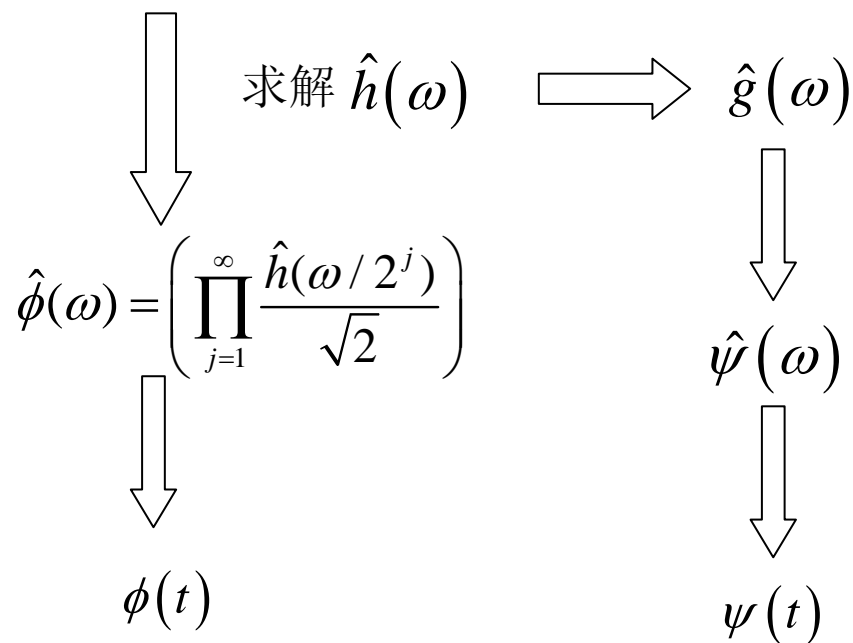
$$2) \quad \sum_k h_k = \sqrt{2} \iff \hat{h}(0) = \sqrt{2}$$

$\{h_k\}$ 能使无穷积 $\hat{\phi}(\omega) = \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}} \right)$ 收敛于 $L^2(\mathbf{R})$ 中正交尺度函数 $\phi(t)$ 的傅立叶变换。

从滤波器序列出发构造尺度函数与小波

构造策略: $h \rightarrow \phi \rightarrow \psi$

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{h}(\omega + \pi)|^2 = 2, \hat{h}(0) = \sqrt{2}$$



Daubechies给出了求解 $\hat{h}(\omega)$ 的一种方法:

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^p F_0(e^{i\omega})$$

$$|F_0(e^{i\omega})|^2 = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p-1+j}{j} \left(\frac{1 - \cos \omega}{2} \right)^j$$

根据Riesz引理, 存在 b_n (可求出) 使得 $F_0(e^{i\omega}) = \sum_{n=0}^{p-1} b_n e^{-in\omega}$

求出 $\hat{h}(\omega)$

Riesz引理: 设 M 是一个非负的只含余弦的三角多项式

$$M(\omega) = \sum_{n=0}^N a_n \cos n\omega, a_n \in R$$

则存在三角多项式 $m(\omega) = \sum_{n=0}^N b_n e^{-in\omega}, b_n \in R$ 使得 $|m(\omega)|^2 = M(\omega)$

附: 详见“小波十讲”

问题： 以上结果不能保证 $\phi(t)$ 为正交的，从而不能保证 $\psi(t)$ 为正交小波。

例3.1 $h = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$ 满足： $\sum_k h_k h_{k+2n} = \delta_{0,n}$, $\sum_k h_k = \sqrt{2}$

相应的两尺度方程为 $\phi(t) = \phi(2t) + \phi(2t-3)$

经过计算知道，

$$\hat{\phi}(\omega) = e^{\frac{-3i\omega}{2}} \frac{\sin \frac{3\omega}{2}}{\frac{3\omega}{2}} \quad \text{或} \quad \phi(t) = \begin{cases} \frac{1}{3}, & 0 \leq t \leq 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$$

容易验算， $\sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = \frac{1}{3} + \frac{4}{9} \cos \omega + \frac{2}{9} \cos(2\omega)$

当 $\omega = \frac{2}{3}\pi$ 时， $\sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2k\pi)|^2 = 0$

因此， ϕ 的平移族不是正交系，从而不是 $L^2(\mathbf{R})$ 的正交尺度函数。

紧支撑正交小波的构造

- 问题

对于 $h = \{h_0, h_1, \dots, h_N\}$, h_0, h_1, \dots, h_N 在满足什么条件下,

两尺度方程

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h_k \phi(2t - k)$$

存在解 $\phi(t) \in L^2(\mathbf{R})$, 并且它是 $L^2(\mathbf{R})$ 中的正交尺度函数?

或者

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{\hat{h}(\omega/2^j)}{\sqrt{2}}$$

收敛, 并且收敛于 $L^2(\mathbf{R})$ 中某个正交尺度函数的 **Fourier** 变换?

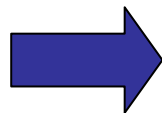
- 必要条件

$$1) \quad \sum_k h_k h_{k+2n} = \delta_{0,n}$$

$$2) \quad \sum_k h_k = \sqrt{2}$$

$$h = \{h_0, h_1, h_2, h_3\}$$

$$\begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1 \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0 \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2} \end{cases}$$



$$h = \left\{ \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \right\}$$

$$h = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\}$$

例3.1表明，1) 和 2) 只是必要条件，非充分条件。

- 充分条件

$$1) \sum_k h_k h_{k+2n} = \delta_{0,n}$$

$$2) \sum_k h_k = \sqrt{2}$$

3) 矩阵 \mathbf{A} 的特征值 $\mathbf{1}$ 是非退化的 (即单根)。其中

$$\mathbf{A} = (a_{i,j})_{(2N-1) \times (2N-1)}$$

$$a_{i,j} = \sum_{k=0}^N h_k h_{j-2i+k}^*, -N+1 \leq i, j \leq N-1$$

$$1) \sum_k h_k h_{k+2n} = \delta_{0,n}$$

$$2) \sum_k h_k = \sqrt{2}$$

3) p 阶消失矩条件

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1+e^{-i\omega}}{2} \right)^p F_0(e^{i\omega}) \quad F_0(e^{i\pi}) \neq 0$$

$|F_0(e^{i\omega})|$ 在 $\omega=0 \sim 2\pi$ 范围内的上界值 $\leq 2^{p-1}$

$$\phi(t): [0, N]$$

$$\psi(t): \left[\frac{-N+1}{2}, \frac{N+1}{2} \right]$$

紧支撑性质如何证明?

• Daubechies 紧支集正交小波

小波消失矩的定义、性质和作用：

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt \longrightarrow \psi(t) \text{ 的 } k \text{ 阶矩。}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t^k \psi(t) dt = 0, \quad k = 0, 1, \dots, p-1, \quad p \geq 1, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} t^p \psi(t) dt \neq 0 \quad \longleftrightarrow \text{p阶消失矩}$$

$$\longrightarrow \langle \psi, x \rangle = 0 \quad x(t) = a_0 + a_1 t + \dots + a_{p-1} t^{p-1}$$

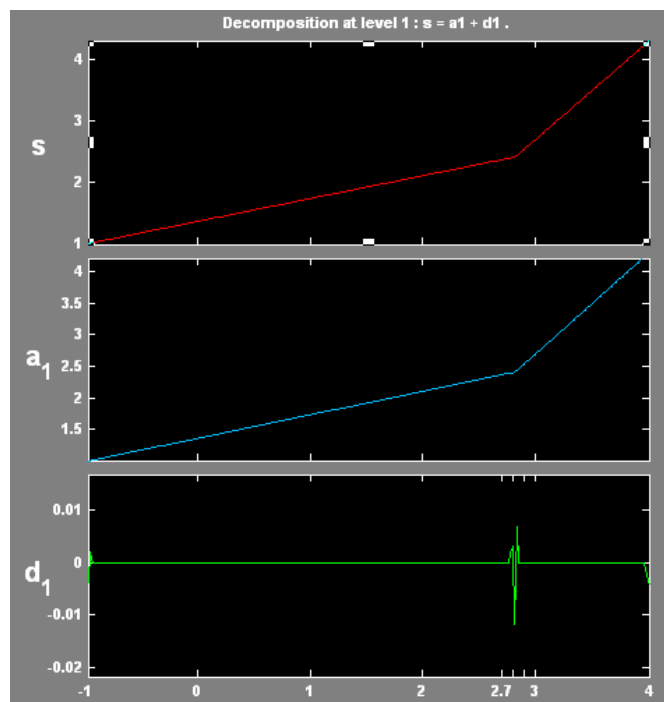
$f(t)$ p 次连续可微的函数, $\psi(t)$ 是 p 阶消失矩的实正交小波, 支撑 $[c, d]$

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle \approx \frac{2^{-j/2}}{p!} 2^{-jp} f^{(p)}(2^{-j}k) \int_c^d t^p \psi(t) dt \quad j \text{ 分辨率}$$

$$\langle f, \psi_{j,k} \rangle \rightarrow 0 \quad j \rightarrow +\infty$$

应用：奇异性检测

$$f(t) = \begin{cases} 0.37t + 1.37, & -1 \leq t < 2.8 \\ 1.58t - 2.03, & 2.8 \leq t \leq 4 \end{cases}$$



对其进行256点等间隔取样,然后用具有2阶消失矩的Db小波分解.由j=8级开始检测,下一级是j=7,有显著不同的小波系数是 $c_{7,97} \approx -0.01$

其余的小波系数都是 10^{-14} 量级.由于k=97时相应的支撑区间为[2.79, 2.83].所以,奇异点就在这个区间.

• Daubechies紧支集正交小波

小波消失矩的等价条件:

ϕ, ψ — 正交尺度函数与正交小波; $\hat{\phi}, \hat{\psi}$ — p 次连续可微

$\psi(t)$ 具有 P 阶消失矩 $\iff \hat{h}^{(k)}(\pi) = 0, k = 0, 1, \dots, p-1$

$$\iff \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2} \right)^p F_0(e^{i\omega}), \text{ 其中 } F_0(e^{i\pi}) \neq 0$$

$$\iff h(z) = \sqrt{2} \left(\frac{1 + z^{-1}}{2} \right)^p F_0(z), \text{ 其中 } F_0(-1) \neq 0$$

消失矩的性质详见命题3.1。

构造Daubechies小波采用的具体方法是，将 $|F_0(e^{i\omega})|^2$ 表示为

$$|F_0(e^{i\omega})|^2 = \sum_{j=0}^{p-1} \binom{p-1+j}{j} \left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)^j$$

由于 $|F_0(e^{i\omega})|^2 = F_0(z)F_0^*(z) = F_0(z)F_0(z^{-1})$

从 $F_0(z)F_0(z^{-1})$ 中的每对互为倒数的零点 $(c_k, 1/c_k)$ 中选择 a_k

，使其在单位圆 $|a_k| \leq 1$ 内，从而求出 $F_0(e^{i\omega})$

—————→ $\hat{h}(\omega)$ —————→ Daubechies小波

性质： $h = \{h_0, h_1, \dots, h_{2p-1}\}$ $g_k = (-1)^k h_{1-k}^*$

ϕ, ψ 的支撑分别为 $[0, 2p-1], [-p+1, p]$

$p=2$ 时,D4小波的求解

$$\left|F_0(e^{i\omega})\right|^2 = \sum_{j=0}^1 \binom{1+j}{j} \left(\frac{1-\cos\omega}{2}\right)^j = 2-\cos\omega$$

$$F_0(z)F_0(z^{-1}) = \frac{1}{4} \left[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})z \right] \left[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})z^{-1} \right]$$

取位于单位圆内的零点组成 $F_0(z)$

$$F_0(z) = \frac{1}{2} \left[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})z^{-1} \right] \longrightarrow h(z) = \frac{\sqrt{2}}{2} \left(\frac{1+z^{-1}}{2} \right)^2 \left[(1+\sqrt{3}) + (1-\sqrt{3})z^{-1} \right]$$

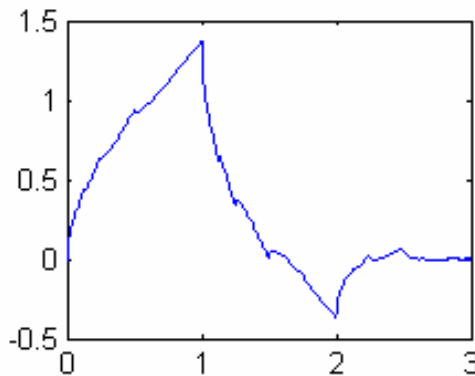
$$\longrightarrow h_0 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}$$

能量分布特点:

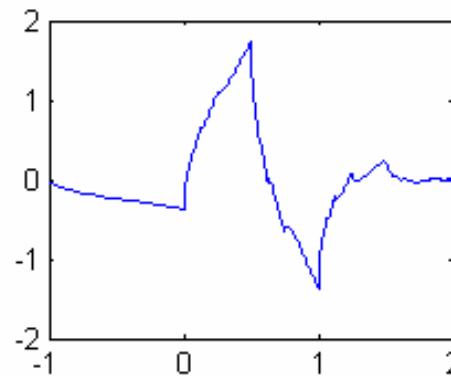
注解: 这正是例3.1中的第一个解。该滤波器在Matlab中用db2表示。

D4尺度函数和D4小波函数:

$$\begin{cases} \phi(t) = \sqrt{2} [h_0\phi(2t) + h_1\phi(2t-1) + h_2\phi(2t-2) + h_3\phi(2t-3)] \\ \psi(t) = \sqrt{2} [h_3\phi(2t+2) - h_2\phi(2t+1) + h_1\phi(2t) - h_0\phi(2t-1)] \end{cases}$$



D4尺度函数



D4小波函数

D4小波函数具有分形性质: 在二进点处处连续但处处不可导。

顺便的, **D6尺度函数与小波函数均连续可微。**

对称性讨论:

小波的主要参数包括其支撑的大小、消失矩阶数、正则性和对称性等.

对称性条件:

$$\varphi(a+t) = \varphi(a-t) \qquad \varphi(a+t) = -\varphi(a-t)$$

Daubechies小波是高度非对称的.

Daubechies已证明, 具有紧支撑和对称性的正交小波仅有 **Haar**小波。注意, Haar小波是p=1的**Daubechies**小波.

Daubechies通过对 $F_0(e^{i\omega})$ 做优化选择,构造出具有近似对称性的紧支的所谓**Symmlet**滤波器 .

在Matlab中,用wfilters()读取小波的滤波器系数;用 waveinfo ()可了解小波的一些性质.

紧支撑正交小波的代数构造法

- 构造具有 p 阶消失矩的紧支撑正交小波的代数约束条件

$\psi(t)$ 具有 p 阶消失矩 \longleftrightarrow

$$\begin{cases} h_0 - h_1 + h_2 + \cdots + (-1)^N h_N = 0 \\ (-1)h_1 + 2^k (-1)^2 h_2 + \cdots + N^k (-1)^N h_N = 0, 0 < k < p \end{cases}$$
$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_k h_k h_{k+2n} = \delta_{0,n} \\ \sum_k h_k = \sqrt{2} \\ h_0 - h_1 + h_2 + \cdots + (-1)^N h_N = 0 \\ (-1)h_1 + 2^k (-1)^2 h_2 + \cdots + N^k (-1)^N h_N = 0, 0 < k < p \end{array} \right.$$

由此，我们可以给出构造有限正交小波滤波器的代数方法。

- 构造具有p阶消失矩的紧支撑正交小波的代数约束条件

$$p=1 \quad \begin{cases} h_0^2 + h_1^2 = 1 \\ h_0 + h_1 = \sqrt{2} \\ h_0 - h_1 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} h &= \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \\ h &= \left\{ -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$p=2 \quad \begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 = 1 \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 = 0 \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 = \sqrt{2} \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 = 0 \\ h_1 - 2h_2 + 3h_3 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} h_0 &= \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \\ h_0 &= \frac{1-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_1 = \frac{3-\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_2 = \frac{3+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}}, h_3 = \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$p=3 \quad \begin{cases} h_0^2 + h_1^2 + h_2^2 + h_3^2 + h_4^2 + h_5^2 = 1 \\ h_0 h_2 + h_1 h_3 + h_2 h_4 + h_3 h_5 = 0 \\ h_0 h_4 + h_1 h_5 = 0 \\ h_0 + h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 = \sqrt{2} \\ h_0 - h_1 + h_2 - h_3 + h_4 - h_5 = 0 \\ h_1 - 2h_2 + 3h_3 - 4h_4 + 5h_5 = 0 \\ h_1 - 2^2 h_2 + 3^2 h_3 - 4^2 h_4 + 5^2 h_5 = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} h_0 &= 0.3326705529500825; h_1 = 0.8068915093110924 \\ h_2 &= 0.4598775021184914; h_3 = -0.1350110211102546 \\ h_4 &= -0.0854412738820267; h_5 = 0.0352262918857095 \end{aligned}$$

代数构造方法的讨论

1. 与Daubechies 充分条件的异同

如何判定从代数约束方程中求出的滤波器是否是小波滤波器？

解决方法:

1) 用Lawton规则

2) 令

$$F_0 = \{f_0, f_1, \dots, f_{N-p}\} \quad (\text{可求出})$$

$$|F_0(e^{i\omega})|^2 = \left(\sum_{k=0}^{N-p} f_k \cos k\omega \right)^2 + \left(\sum_{k=0}^{N-p} f_k \sin k\omega \right)^2$$

只要验证 $|F_0(e^{i\omega})|^2$ 在 $0 \sim 2\pi$ 上的最大值小于等于 4^{p-1} 即可。

代数构造方法的讨论

2. 代数约束方程的一般求解方法

解决方法:

分为非线性部分与线性系统. 先求解后者,再代入前者进行简化求解.

参考文献:

Yankui Sun, Fan Bao, Chen Ding. Research on Solving Algebraic Equation Set of Orthogonal and Biorthogonal Wavelet Under Vanishing Moment Constraint. Proceedings of 2007 International Conference on Wavelet Analysis and Pattern Recognition, 1847-1852,2007.

两种构造方法的比较

1. 已知条件相同，即都是求解具有 p 阶消失矩的紧支撑正交小波，但求解方法不同。
2. **Daubechies**方法比较复杂，但利用**Riesz**引理，从理论上可以求出消失矩阶数 p 较大时的解。
3. 代数构造方法理解起来相对简单，但适合较小消失矩阶数 p ($p \leq 11$) 的求解， p 太大时，求解困难。适合初学者，但理论上优势不明显。

尺度函数与小波函数的求解与作图

问题:

1. 当低通滤波器 h 确定后，如何求解尺度函数与小波函数？
2. 一般地，尺度函数与小波函数不存在解析表达式，如何绘制尺度函数与小波函数的波形？

• 尺度函数的精确求解

$$\phi(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h_k \phi(2t - k)$$
$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \quad \longrightarrow \quad \hat{\phi}(\omega) = \prod_{j=1}^{\infty} m_0(\omega/2^j) \quad \longrightarrow \quad \phi(t)$$

例: 求Haar小波的尺度函数

$$m_0(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{k=0}^1 \frac{1}{\sqrt{2}} e^{-ik\omega} = \frac{1}{2} (1 + e^{-i\omega}) \quad \longrightarrow \quad \prod_{j=1}^J m_0(\omega/2^j) = \frac{1 - e^{-i\omega}}{2^J (1 - e^{-i\omega/2^J})}$$

$$\longrightarrow \quad \hat{\phi}(\omega) = \lim_{J \rightarrow \infty} \prod_{j=1}^J m_0(\omega/2^j) = \lim_{J \rightarrow \infty} \frac{1 - e^{-i\omega}}{2^J (1 - e^{-i\omega/2^J})} = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}$$

由于 $\int_{-\infty}^{+\infty} X_{[0,1]}(t) e^{-i\omega t} dt = \int_0^1 e^{-i\omega t} dt = -\frac{1}{i\omega} e^{-i\omega t} \Big|_0^1 = \frac{1 - e^{-i\omega}}{i\omega}$

所以 $\phi(t) = X_{[0,1]}(t)$

实际求解问题： 无穷积很难计算出来！！

• 尺度函数的迭代求解（近似解）

假定 $\{h_k\}$ 为已知，选用某一函数 $\phi_0(t)$ 作为迭代算法的初始函数，只要它满足： $\hat{\phi}_0(\omega)=1$ 即可。迭代过程按下式进行：

$$\phi_n(t) = \sqrt{2} \sum_{k=0}^N h_k \phi_{n-1}(2t-k)$$

易证明， $\phi_n(t) \rightarrow \phi(t)$

如果迭代收敛，则 h 对应的尺度函数与初始函数的选取无关。一个简单而实用的初始化选择为

$$\phi_0(t) = N_2(t)$$

进一步可证明，相应尺度函数与小波函数的紧支撑性质。

$$\phi(t): [0, N] \qquad \psi(t): \left[\frac{-N+1}{2}, \frac{N+1}{2} \right]$$

- 正交尺度函数与小波函数的做图

如果 h 的支集为 $[0, N]$ ，则 ϕ 和 ψ 的支集分别是 $[0, N]$ 和 $\left[\frac{-N+1}{2}, \frac{N+1}{2}\right]$

方法一：求出正交尺度函数与小波在二进点处的值

Step1 计算出 $\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(N-1)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(1) = \sqrt{2} [h_0 \phi(2) + h_1 \phi(1)] \\ \phi(2) = \sqrt{2} [h_0 \phi(4) + h_1 \phi(3) + h_2 \phi(2) + h_3 \phi(1)] \\ \dots \\ \phi(N-2) = \sqrt{2} [h_{N-3} \phi(N-1) + h_{N-2} \phi(N-2) + h_{N-1} \phi(N-3) + h_N \phi(N-4)] \\ \phi(N-1) = \sqrt{2} [h_{N-1} \phi(N-1) + h_N \phi(N-2)] \end{array} \right.$$


$$\sum_{k=1}^{N-1} \phi(k) = 1$$

尺度函数与小波函数的求解与作图

- 正交尺度函数与小波函数的做图


Step2

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi\left(\frac{k}{2}\right) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^N h_n \phi(k-n) \\ \phi\left(\frac{k}{2^2}\right) = \sqrt{2} \sum_{n=0}^N h_n \phi\left(\frac{k}{2} - n\right) \\ \dots \end{array} \right.$$

 $\phi\left(\frac{k}{2^j}\right)$ 如取j=10即可绘制出尺度函数的图形

Step3

$$\psi(t) = \sqrt{2} \sum_{n=N}^0 (-1)^{n-1} h_n \phi(2t+n-1)$$

 $\psi\left(\frac{k}{2^j}\right)$

- 举例

可以算出,对于D4尺度函数,有

$$\phi(1) = \frac{1+\sqrt{3}}{2}, \phi(2) = \frac{1-\sqrt{3}}{2}$$

于是,可由D4的两尺度方程和小波方程做出其尺度函数与小波的图形.

在Matlab中,用wavefun()可绘制尺度函数与小波函数的图形. 在使用时需要输入“小波的名字”, 在Matlab中没有被命名的小波难以做图. 相比之下, 上述方法一具有更好的应用范围. 即只要知道低通滤波器系数即可做图.

顺便指出, Matlab绘制的尺度函数与小波函数图形没有给出精确的支撑区间.

思考问题: wavefun()做图的算法基础是什么? 是否迭代算法?

- 方法二:

对单位向量用逆小波变换生成尺度函数与小波函数的波形

正交尺度函数 ϕ 多分辨分析 $\{V_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 待分析的函数 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$

分解信号 f 首先需要初始化. 该步包含两部分. 1) 先要决定近似空间 V_L , 使其能最佳地反映 f 的各种信息. 2) 需要选择 $f_L(t) \in V_L$, 以便能最佳地逼近 f .

V_L 中对 f 的最佳逼近, 根据能量观点, 是 f 在 V_L 上的正交投影 $P_L f$.

$$P_L f(t) = \sum_n a_n^L \phi_{L,n}(t) \in V_L \quad \phi_{L,n}(t) = 2^{L/2} \phi(2^L t - n)$$

$$\text{其中, } a_n^L = \langle f, \phi_{L,n} \rangle = 2^{L/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(2^L t - n) dt$$

问题: 如何计算 $a_n^L = \langle f, \phi_{L,n} \rangle$?

定理: 设 $\{V_j, j \in Z\}$ 是一个紧支撑的(实)尺度函数 ϕ 生成的多分辨分析. 若 $f(t) \in L^2(R)$ 是连续的, 那么对足够大的 j , 有

$$a_n^j = 2^{j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \phi(2^j t - n) dt \approx 2^{-j/2} m f(n/2^j) \quad m = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(t) dt$$

注: 该结论对分段信号 f 也成立. 也可应用于 ϕ 具有良好局部化但不是紧支撑的情况.

根据上述定理, 可以用下式近似投影 $P_L f$:

$$P_L f(t) \approx f_L(t) = 2^{-L/2} \sum_n f(n/2^L) \phi_{L,n}(t)$$

附注: 定理的证明见教材参考文献4。

$$a^L = \{a_n^L\}_{n \in \mathbb{Z}} \longrightarrow a^0, d^0, d^1, \dots, d^{L-1}$$

$$\longrightarrow f_L(t) = \sum_n a_n^0 \phi_{0,n}(t) + \sum_n d_n^0 \psi_{0,n}(t) + \sum_n d_n^1 \psi_{1,n}(t) + \dots + \sum_n d_n^{L-1} \psi_{L-1,n}(t)$$

$$f = \phi \in V_0 \subset V_L \longrightarrow P_L f(t) = P_L \phi(t) = \phi(t)$$

$$\longrightarrow \phi(t) \approx \sum_n a_n^0 \phi_{0,n}(t) + \sum_n d_n^0 \psi_{0,n}(t) + \sum_n d_n^1 \psi_{1,n}(t) + \dots + \sum_n d_n^{L-1} \psi_{L-1,n}(t)$$

$$\longrightarrow a_n^0 = \delta_n = \begin{cases} 1, n = 0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases} \quad d_n^j = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq j \leq L-1$$

结论: 用逆小波变换可重构 a^L , 从而绘制出尺度函数高精度的图形.

$$a_n^L = 2^{-L/2} \phi(n/2^L)$$

$$f = \psi \in W_0 \subset V_1 \subset V_L$$

→ $P_L f(t) = P_L \psi(t) = \psi(t)$

→ $\psi(t) \approx \sum_n a_n^0 \phi_{0,n}(t) + \sum_n d_n^0 \psi_{0,n}(t) + \sum_n d_n^1 \psi_{1,n}(t) + \cdots + \sum_n d_n^{L-1} \psi_{L-1,n}(t)$

→ $a_n^0 = 0 \quad d_n^0 = \delta_n \quad d_n^j = 0 \quad \forall n \in \mathbb{Z} \quad 0 \leq j \leq L-1$

结论: 用逆小波变换可重构 a^L , 从而绘制出小波函数高精度的图形.

$$a_n^L = 2^{-L/2} \psi(n/2^L)$$

Matlab小波工具箱中若干函数介绍

- `wfilters()`
- `waveinfo ()`
- `wavefun()`
- `upcoef()`

我们发现，利用`upcoef()`可简单地绘制尺度函数与小波函数的图形,非常简单（参考P73）。与`wavefun()`相比的优势在于,只要给定滤波器的系数,就能够做图。

作业

- 第三章习题任选两题