小波分析及其工程应用

孙 延奎

清华大学计算机系

2009.3.17

第2章 多分辨分析

- 小波分析重点研究能量有限空间$L^2(R)$平方可积空间及其函数的有效表示形式
- 多分辨分析的概念
- 用多分辨分析构造小波的基本方法
- 小波变换的快速算法---Mallat算法

- 多分辨分析（**Multiresolution Analysis,MRA**）构造正交小波基

MRA $\Rightarrow$ **(**非正交**)**尺度函数 $\boxed{\varphi(t)}$

正交化

$\Rightarrow$ 正交尺度函数 $\boxed{\phi(t)}$

两尺度方程

$\Rightarrow$ 低通滤波器 $\boxed{\{h_k\}_{k\in Z}}$

$\Rightarrow$ 高通滤波器 $\boxed{\{g_k\}_{k\in Z}}$

小波方程

$\Rightarrow$ 小波函数 $\boxed{\psi(t)}$

MRA $\longrightarrow$ $\boxed{\varphi(t)\rightarrow\phi\rightarrow h\rightarrow g\rightarrow\psi(t)}$ 时域求解过程

时域和频域的对应关系

$$\phi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\phi(2t-k) \Longleftrightarrow \hat{\phi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{h}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_k g_k\phi(2t-k) \Longleftrightarrow \hat{\psi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

$$g_k=(-1)^k h_{1-k}^* \Longleftrightarrow \hat{g}(\omega)=-e^{-i\omega}\hat{h}^*(\omega+\pi)$$

其中，$\hat{h}(\omega)=\sum_k h_k e^{-ik\omega}$，$\hat{g}(\omega)=\sum_k g_k e^{-ik\omega}$

$$\begin{aligned}\hat{\psi}(\omega)&=\sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\phi(2t-k)\right)e^{-i\omega t}dt\\&=\sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(2t-k)e^{-i\omega t}dt\\&=\sqrt{2}\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(u)e^{-i\omega u/2}e^{-i\omega k/2}\frac{du}{2}\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[g_k e^{-i\omega k/2}\int_{-\infty}^{+\infty}\phi(u)e^{-i\omega u/2}du]\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k=-\infty}^{\infty}[g_k e^{-i\omega k/2}]\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{g}(\omega)&=\sum_k g_k e^{-ik\omega}=\sum_k(-1)^k h_{1-k}^* e^{-ik\omega}\\&\underline{\underline{l=1-k}}\sum_l(-1)^{1-l}h_l^* e^{-i\omega+il\omega}\\&=-e^{-i\omega}\sum_l(-1)^l h_l^* e^{il\omega}\\&=-e^{-i\omega}\sum_l h_l^* e^{il(\omega+\pi)}\\&=-e^{-i\omega}\hat{h}^*(\omega+\pi)\end{aligned}$$

频域求解过程

$$\varphi(t) \longrightarrow \hat{\varphi}(\omega) \longrightarrow \hat{\phi}(\omega) \longrightarrow \hat{h}(\omega) = \sqrt{2}\frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)}$$

$$\longrightarrow \hat{g}(\omega) = -e^{-i\omega}\hat{h}^{*}(\omega+\pi)$$

$$\longrightarrow \hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$

$$\varphi(t) \to \hat{\varphi}(\omega) \to \hat{\phi}(\omega) \to \hat{h}(\omega) \to \hat{g}(\omega) \to \hat{\psi}(\omega) \to \psi(t)$$

正交小波函数的构造举例

- 例 (P46) **Haar小波**

$$\phi(t)=\chi_{[0,1]}(t) \quad \Longrightarrow \quad \phi(t)=\phi(2t)+\phi(2t-1)$$

$$\Longrightarrow \quad h_0=\sqrt{2}/2 \quad h_1=\sqrt{2}/2 \quad h_n=0(n\neq 0,1)$$

$$\Longrightarrow \quad \psi(t)=\phi(2t)-\phi(2t-1)$$

$$\phi(t)=\chi_{[0,1]}(t) \quad \Longrightarrow \quad \hat{\phi}(\omega)=\frac{1-e^{-i\omega}}{i\omega}=\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}e^{-i\omega/2}$$

$$\Longrightarrow \quad \hat{h}(\omega)=\sqrt{2}\frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(1+e^{-i\omega}\right)$$

$$\Longrightarrow \quad h_0=\sqrt{2}/2 \quad h_1=\sqrt{2}/2 \quad h_n=0(n\neq 0,1)$$

$$\Longrightarrow \quad \psi(t)=\phi(2t)-\phi(2t-1)$$

- 例 (P46) **Battle-Lemarie样条小波**

m次基数B样条$N_{m+1}(t)$是m次基数B样条多分辨分析$\{V_j\}$的一个非正交尺度函数。

令

$$\theta_m(t)=\begin{cases} N_{m+1}\left(t+\dfrac{m}{2}\right), & \text{当}m\text{是偶数时} \\ N_{m+1}\left(t+\dfrac{m+1}{2}\right), & \text{当}m\text{是奇数时} \end{cases}$$

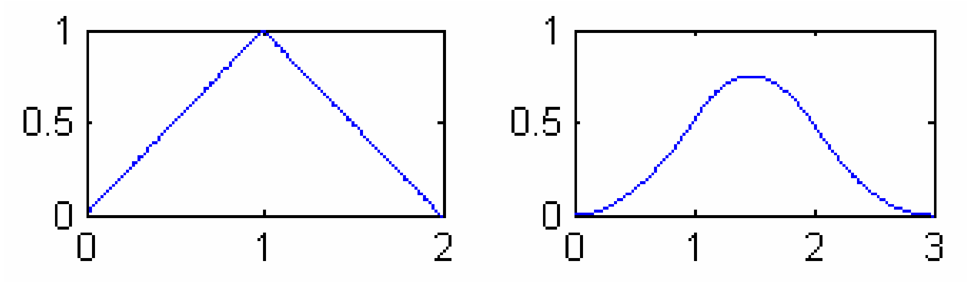
称之为**m次盒（box）样条**。

性质：

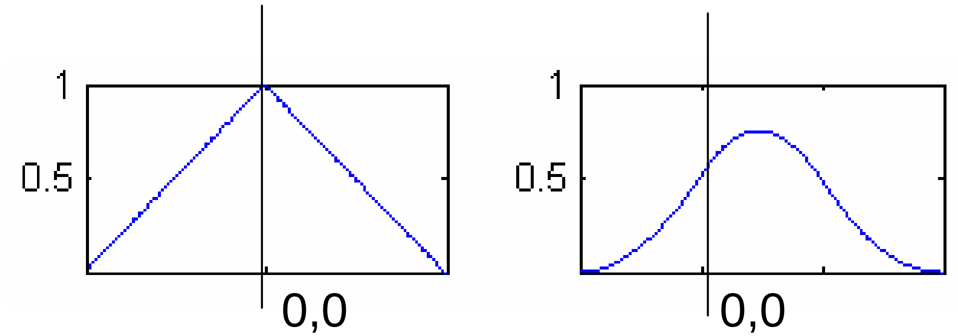
1）当m为偶数时，盒样条关于1 /2对称；当m为奇数时，盒样条关于0对称。

2） $\theta_m(t)$是m次基数B样条多分辨分析$\{V_j\}$的另一个非正交尺度函数

- 例 (P46) **Battle-Lemarie样条小波**



线性样条尺度函数**N_2(t)**和二次样条尺度函数 **N_3(t)**



1次盒样条尺度函数$\theta_1(t)$和**2**次盒样条尺度函数 $\theta_2(t)$

$\theta_1(t) = N_2(t+1)$　　　　$\theta_2(t) = N_3(t+1)$

下面通过对盒样条尺度函数的正交化构造正交小波。

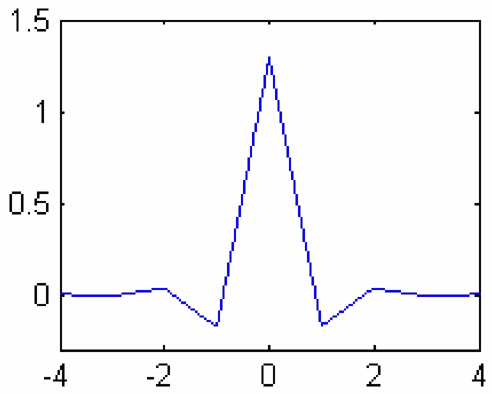
正交小波函数的构造举例

- **Battle-Lemarie线性样条小波**

$$\hat{\theta}_1(\omega)=\left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2}\right]^2 \Longrightarrow \hat{\phi}(\omega)=\frac{\hat{\theta}_1(\omega)}{\left[\sum_{k\in Z}\left|\hat{\theta}_1(\omega+2k\pi)\right|^2\right]^{1/2}}$$

$$\Longrightarrow \hat{\phi}(\omega)=\left[\frac{\sin\frac{\omega}{2}}{\frac{\omega}{2}}\right]^2 \Big/ \left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

ϕ 为正交尺度函数，称为**Battle-Lemarie**线性样条尺度函数。



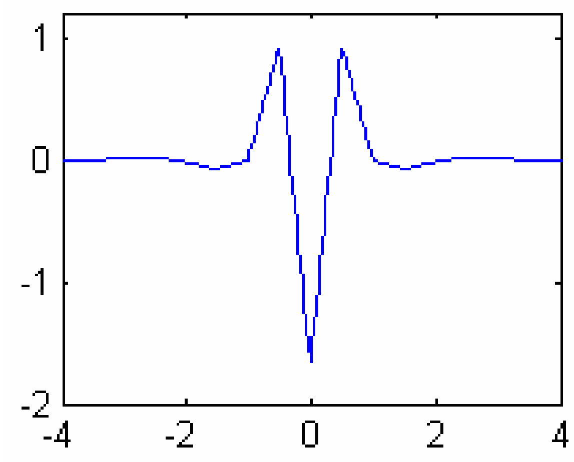
Matlab实现技巧：用函数 quadv()

$$\Rightarrow \quad \hat{h}(\omega)=\sqrt{2}\frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)}=\sqrt{2}\left(\frac{1+\cos\omega}{2}\right)\sqrt{\frac{2+\cos\omega}{1+2\cos^2\omega}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{g}(\omega)=-e^{-i\omega}\hat{h}^*(\omega+\pi)=-\frac{e^{-i\omega}(1+\cos(\omega+\pi))}{\sqrt{2}}\sqrt{\frac{2+\cos(\omega+\pi)}{1+2\cos^2(\omega+\pi)}}$$

$$\Rightarrow \quad \hat{\psi}(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2}}\hat{g}(\frac{\omega}{2})\hat{\phi}(\frac{\omega}{2})$$

$$=-\frac{16e^{-i\frac{\omega}{2}}}{\omega^2}\sin^4\frac{\omega}{4}\sqrt{\frac{1+2\sin^2\frac{\omega}{4}}{\left(1-\frac{2}{3}\sin^2\frac{\omega}{4}\right)\left(3-8\sin^2\frac{\omega}{4}+8\sin^4\frac{\omega}{4}\right)}}$$



Matlab实现技巧：用函数 quadv()

无限支撑的对称的正交小波

正交小波函数的构造举例

- **Battle-Lemarie**线性样条小波

$\{h_n\}$ 有无限支集，但 h_n 是指数衰减的。

见表2.1

n	h_n	n	h_n
0	0.817645956	6,-6	-0.003883261
1,-1	0.397296430	7,-7	-0.002201945
2,-2	-0.069101020	8,-8	0.000923371
3,-3	-0.051945337	9,-9	0.000511636
4,-4	0.016974805	10,-10	-0.000224296
5,-5	0.009990599	11,-11	-0.000122686

正交小波函数的构造举例

- **例2.7 Shannon小波**

例2.4 Shannon多分辨分析

$$\phi(t)=\frac{\sin \pi t}{\pi t} \qquad \phi(t)=\sum_{n\in Z}\phi\left(\frac{n}{2}\right)\phi(2t-n)=\sum_{n\in Z}\frac{\sin(n\pi/2)}{(n\pi/2)}\phi(2t-n)$$

容易验证：

$$\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)\right|^2=1$$

$$h_n=\frac{1}{\sqrt{2}}c_n \qquad c_n=\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}} \qquad \begin{cases} c_{2k+1}=\dfrac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi} \\ c_{2k}=0, k\neq 0 \\ c_0=1 \end{cases}$$

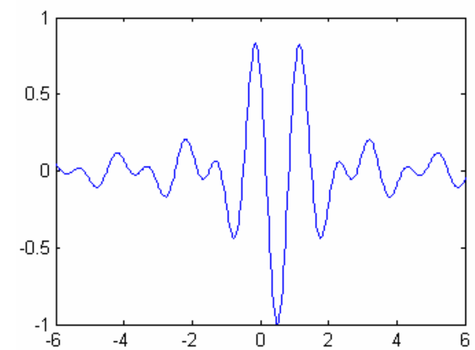
$$\phi(t)=\sum_{k\in Z}\frac{2(-1)^k}{(2k+1)\pi}\phi(2t-2k-1)+\phi(2t)$$

正交小波函数的构造举例

$$\psi(t)=\sqrt{2}\sum_{k\in Z} g_k\phi(2t-k)=\sqrt{2}\sum_{k\in Z}(-1)^k h_{1-k}\phi(2t-k)$$

$$=\sum_{k\in Z}(-1)^k c_{1-k}\phi(2t-k)\,\underline{\underline{l=1-k}}\sum_{l\in Z}(-1)^{1-l}c_l\phi(2t+l-1)$$

$$=\sum_{k\in Z}c_{2k+1}\phi(2t+2k)-c_0\phi(2t-1)$$



而 $$c_n=\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{\frac{n\pi}{2}}\Rightarrow c_n=c_{-n}$$

$$\phi(t)=\sum_{k\in Z}c_{2k+1}\phi(2t-2k-1)+\phi(2t)=\sum_{k\in Z}c_{2k+1}\phi(2t+2k+1)+\phi(2t)$$

$$\Rightarrow\phi\left(t-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k\in Z}c_{2k+1}\phi(2t+2k)+\phi(2t-1)$$

$$\begin{cases}\phi\left(t-\frac{1}{2}\right)=\sum_{k\in Z}c_{2k+1}\phi(2t+2k)+\phi(2t-1)\\ \psi(t)=\sum_{k\in Z}c_{2k+1}\phi(2t+2k)-\phi(2t-1)\end{cases}$$

$$\psi(t)=\phi\left(t-\frac{1}{2}\right)-2\phi(2t-1)=\frac{\sin\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)-\sin2\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}{\pi\left(t-\frac{1}{2}\right)}$$

$L^2(R)$ 中函数的小波级数表示

$$L^2(R)=\oplus_{j\in Z}W_j$$

$$f(t)=\oplus_{j\in Z}d_j(t),d_j(t)\in W_j,f(t)\in L^2(R)$$

$$=\sum_{j,k\in Z}d_k^j\psi_{j,k}(t)\qquad \sum_k\sum_j\left|d_k^j\right|^2<\infty$$

称为 $f(t)$ 的小波级数表示.

容易证明: $d_k^j=\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle$ 小波系数

MRA确定了小波级数表示与小波变换之间的关系.

函数的多分辨表示

$$f(t) \in L^2(R) \longrightarrow f_j(t) = P_j f(t) \in V_j$$ **P_j**正交投影

$$\begin{aligned} V_j &= V_{j-1} \oplus W_{j-1} \\ &= V_{j-2} \oplus W_{j-2} \oplus W_{j-1} \\ &= \cdots \\ &= V_M \oplus W_M \oplus W_{M+1} \oplus \cdots \oplus W_{j-1} \quad (M < j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_j &= f_{j-1} + w_{j-1} \\ &= f_{j-2} + w_{j-2} + w_{j-1} \\ &= \cdots \\ &= f_M + w_M + w_{M+1} + \cdots + w_{j-1} \end{aligned}$$

上式即为**f_j**的一个多分辨率表示。

小波变换的快速算法----Mallat算法

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1}$$

$$f_j = f_{j-1} + d_{j-1}$$

$$f_j(t) = \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t) \in V_j$$

$$f_{j-1}(t) = \sum_k c_k^{j-1} \phi_{j-1,k}(t) \in V_{j-1}$$

$$d_{j-1}(t) = \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t) \in W_{j-1}$$

问题：已知 $c^j = \{c_k^j\}_{k\in Z}$ ，给出计算 $c^{j-1} = \{c_k^{j-1}\}_{k\in Z}$，$d^{j-1} = \{d_k^{j-1}\}_{k\in Z}$ 的快速算法。

猜想： 类比第一章**Haar**小波变换的二通道滤波器实现，结果应该是什么？

推导过程：$f_j(t)=\sum_k c_k^j\phi_{j,k}(t)=\sum_k c_k^{j-1}\phi_{j-1,k}(t)+\sum_k d_k^{j-1}\psi_{j-1,k}(t)$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle \sum_n c_n^j\phi_{j,n}(t),\phi_{j-1,k}(t)\right\rangle=\left\langle \sum_n c_n^{j-1}\phi_{j-1,n}(t),\phi_{j-1,k}(t)\right\rangle+\left\langle \sum_n d_n^{j-1}\psi_{j-1,n}(t),\phi_{j-1,k}(t)\right\rangle$$

$$\Downarrow$$

$$\left\langle \sum_n c_n^j\phi_{j,n}(t),\phi_{j-1,k}(t)\right\rangle=c_k^{j-1}+0$$

$$\phi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\phi(2t-k)\quad\Rightarrow$$

$$\phi_{j-1,k}(t)=2^{\frac{j-1}{2}}\phi\left(2^{\frac{j-1}{2}}t-k\right)=2^{j/2}\sum_l h_l\phi\left[2\left(2^{\frac{j-1}{2}}t-k\right)-l\right]$$

$$=\sum_l h_l 2^{j/2}\phi\left[2^{j/2}t-(2k+l)\right]=\sum_l h_l\phi_{j,2k+l}$$

$$<\phi_{j,n},\phi_{j-1,k}>=<\phi_{j,n},\sum_l h_l\phi_{j,2k+l}>=\sum_l h_l^*<\phi_{j,n},\phi_{j,2k+l}>$$

$$=\sum_l h_l^*\delta_{n,2k+l}=h_{n-2k}^*$$

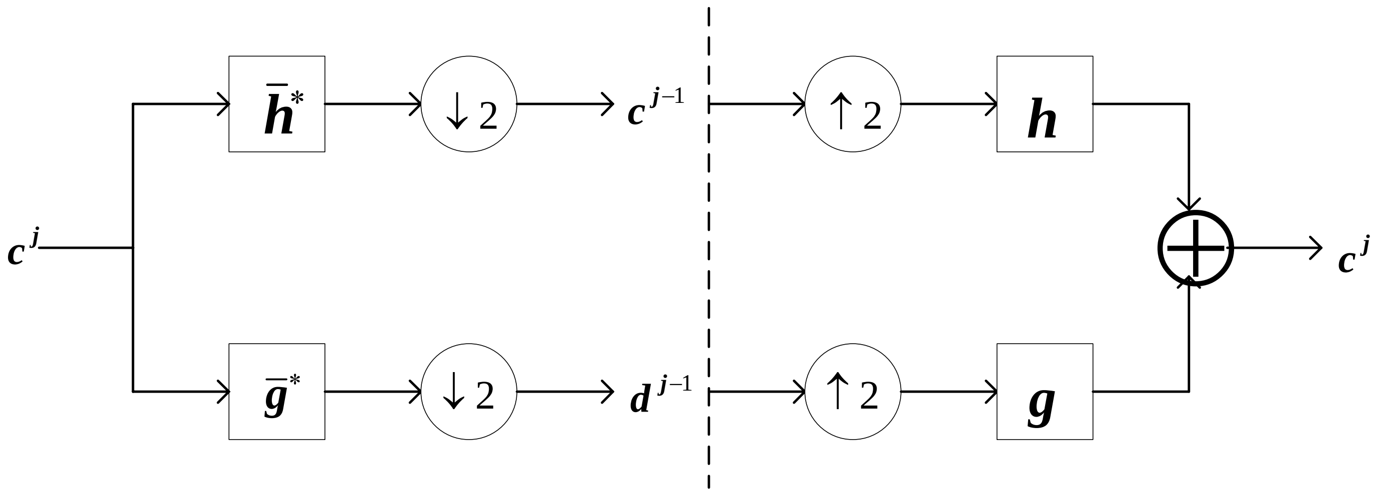
$$c_k^{j-1}=\sum_n c_n^j\left\langle\phi_{j,n}(t),\phi_{j-1,k}(t)\right\rangle=\sum_n c_n^j h_{n-2k}^*$$

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum\limits_n c_n^j h_{n-2k}^* \\ d_k^{j-1} = \sum\limits_n c_n^j g_{n-2k}^* \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c^{j-1} = D\left(c^j * \bar{h}^*\right) \\ d^{j-1} = D\left(c^j * \bar{g}^*\right) \end{cases}$$

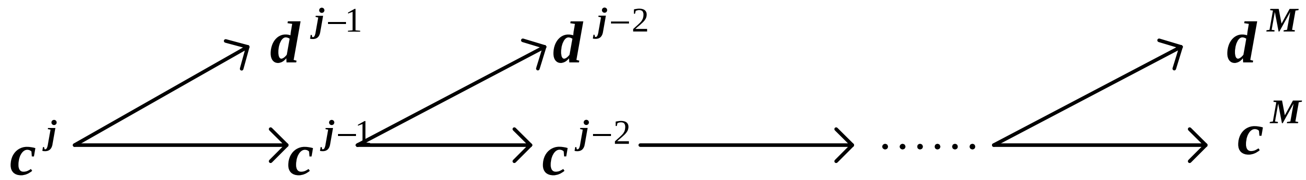
分解算法

$$c_k^j = \sum_n c_n^{j-1} h_{k-2n} + \sum_n d_n^{j-1} g_{k-2n} \Longleftrightarrow c^j = (Uc^{j-1}) * h + (Ud^{j-1}) * g$$

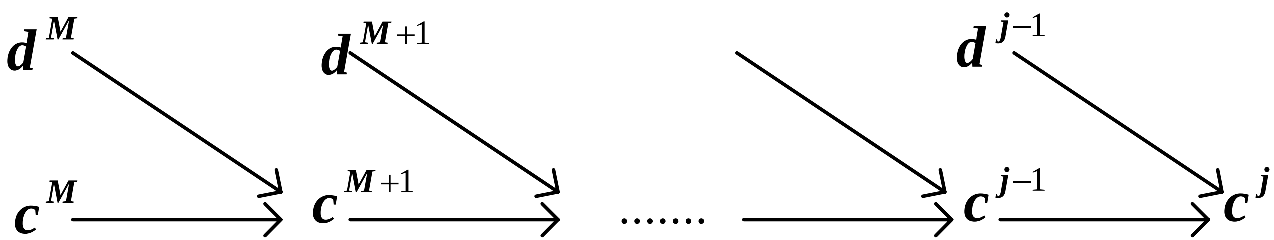
重构算法



可以看出，小波变换的快速算法本质上由低通滤波器h完全确定.不涉及尺度函数与小波函数的具体表达式.



小波分解的迭代过程



小波重构的迭代过程

（正交）多分辨分析与两尺度方程

$\phi(t)$ 生成$L^2(R)$的多分辨分析$\{V_j\}$

? 第三章

$$\phi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\phi(2t-k)$$

$$\phi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\phi(2t-k)$$

$$h_k=\left\langle \phi(t),\sqrt{2}\phi(2t-k)\right\rangle$$

V_j 由 $\left\{\phi_{j,k}(t)\right\}_{j,k\in Z}$ 生成

一维双正交多分辨分析

理想的目标：

寻找一个小波，使得其二进伸缩与平移构成**L²(R)**的标准正交基。

$$f(t)=\sum_j\sum_k d_k^j\psi_{j,k}(t) \qquad d_k^j=\left\langle f,\psi_{j,k}\right\rangle$$

遇到的问题：

限制条件太强，满足条件的小波难以构造。

解决办法：

稍微放松限制条件，寻找比标准正交基要求较低的基： **Riesz**基

一维双正交多分辨分析

$\psi(t) \in L^2(R)$, $\psi_{j,k}(t), j,k \in \mathbf{Z}$ 是***L*²(R)**的**Riesz**基**,** 如果 下列条件成立**:**

- $\psi_{j,k}(t)$, $j,k \in \mathbf{Z}$ 线性无关.
- 存在常数*A*和*B*, $0 < A \le B < \infty$, 使得对 ***L*²(R)**中任意有限能量函数*f*(*t*),有

$$f(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_k^j \psi_{j,k}(t)$$

$$A\|f\|_2^2 \le \sum_{j=-\infty}^{\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|d_k^j\right|^2 \le B\|f\|_2^2$$

问： 在**Riesz**基的假设下, $d_k^j = \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle$ 是否成立？

一维双正交多分辨分析

进一步的希望：

能够找到$L^2(R)$的另外一个Riesz基 $\tilde{\psi}_{j,k}(t)$，并满足

$$\left\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \right\rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \forall j,k,l,m \in Z$$

$\psi, \tilde{\psi}$ 称为对偶小波。

$$f \in L^2(R) \Longrightarrow f(t) = \sum_{j\in Z}\sum_{n\in Z} d_n^j \psi_{j,n}(t),\ f(t) = \sum_{j\in Z}\sum_{n\in Z} \tilde{d}_n^j \tilde{\psi}_{j,n}(t)$$

$$\Longrightarrow d_n^j = \left\langle f, \tilde{\psi}_{j,n} \right\rangle \quad , \quad \tilde{d}_n^j = \left\langle f, \psi_{j,n} \right\rangle$$

$$\Longrightarrow f = \sum_j\sum_n \left\langle f, \tilde{\psi}_{j,n} \right\rangle \psi_{j,n} = \sum_j\sum_n \left\langle f, \psi_{j,n} \right\rangle \tilde{\psi}_{j,n}$$

注： 在不同的表示中，区别哪个是分析小波？哪个是重构小波？

一维双正交多分辨分析

$\{V_j\}_{j\in Z}$ ϕ $\{\tilde{V}_j\}_{j\in Z}$ $\tilde{\phi}$ （非正交尺度函数）

1) $\left\langle \phi(\bullet - j), \tilde{\phi}(\bullet - k) \right\rangle = \delta_{j,k}, \forall j,k \in Z$ （对偶尺度函数）

2) $V_{j+1} = V_j \dot{+} W_j$, $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \dot{+} \tilde{W}_j$ （直和）

3) 如果存在***L*²(R)**中的函数 $\psi(t)$, $\tilde{\psi}(t)$ 和序列 $\{g_n\}$ 、$\{\tilde{g}_n\}$ 满足：

$$\begin{cases} \psi(t) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-n) \\ \tilde{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{g}_n \tilde{\phi}(2t-n) \end{cases} \quad \text{使得} \quad \begin{cases} \left\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{l,m} \right\rangle = \delta_{j,l}\delta_{k,m}, \forall j,k,l,m \in Z \\ \left\langle \psi_{j,k}, \tilde{\phi}_{j,m} \right\rangle = 0, \forall j,k,m \in Z \\ \left\langle \phi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,m} \right\rangle = 0, \forall j,k,m \in Z \end{cases}$$

（不能直接采用正交小波的构造方式）

且 $\{\psi_{j,k}(t); k \in Z\}$ 是 W_j 的**Riesz**基；$\{\tilde{\psi}_{j,k}(t); k \in Z\}$ 是 $\tilde{W}_j$ 的**Riesz**基。

从而 $\{\psi_{j,k}(t); j,k \in Z\}$, $\{\tilde{\psi}_{j,k}(t); j,k \in Z\}$ 是***L*²(R)**的**Riesz**基

则称 $\{V_j, \tilde{V}_j; j \in Z\}$ 是L^2(R)的一个双正交多分辨分析 。

一维双正交多分辨分析

性质：

1） $V_j \perp \tilde{W}_j$ ， $\tilde{V}_j \perp W_j$ ， $\tilde{W}_j \perp W_l, l \neq j$

2） $L^2(R) = \cdots \dot{+} W_{-1} \dot{+} W_0 \dot{+} W_1 \dot{+} W_2 \dot{+} \cdots = \cdots \dot{+} \tilde{W}_{-1} \dot{+} \tilde{W}_0 \dot{+} \tilde{W}_1 \dot{+} \tilde{W}_2 \dot{+} \cdots$

$$f(t) = \sum_{j \in Z} \sum_{n \in Z} d_n^j \psi_{j,n}(t) \quad , \qquad d_n^j = \left\langle f(t), \tilde{\psi}_{j,n} \right\rangle$$

$$f(t) = \sum_{j \in Z} \sum_{n \in Z} \tilde{d}_n^j \tilde{\psi}_{j,n}(t) \quad , \qquad \tilde{d}_n^j = \left\langle f(t), \psi_{j,n} \right\rangle$$

$$f = \sum_j \sum_n \left\langle f, \tilde{\psi}_{j,n} \right\rangle \psi_{j,n} = \sum_j \sum_n \left\langle f, \psi_{j,n} \right\rangle \tilde{\psi}_{j,n}$$

用于重构

用于分析　　用于重构　　用于分析

一维双正交多分辨分析

性质：

3）
$$
\begin{aligned}
V_j &= V_{j-1} \dot{+} W_{j-1} \\
&= V_{j-2} \dot{+} W_{j-2} \dot{+} W_{j-1} \\
&= \cdots \\
&= V_M \dot{+} W_M \dot{+} W_{M+1} \dot{+} \cdots \dot{+} W_{j-1}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_j &= f_{j-1} + w_{j-1} \\
&= f_{j-2} + w_{j-2} + w_{j-1} \\
&= \cdots \\
&= f_M + w_M + w_{M+1} + \cdots + w_{j-1}
\end{aligned}
$$

对偶空间也有相似的性质。

一维双正交多分辨分析

$$V_j = V_{j-1} \dot{+} W_{j-1}$$

$$f_j = f_{j-1} + d_{j-1}$$

$$f_j(t) = \sum_k c_k^j \phi_{l,k}(t) \in V_j$$

$$f_{j-1}(t) = \sum_k c_k^{j-1} \phi_{j-1,k}(t) \in V_{j-1}$$

$$d_{j-1}(t) = \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t) \in W_{j-1}$$

$$\tilde{V}_j = \tilde{V}_{j-1} \dot{+} \tilde{W}_{j-1}$$

$$\tilde{f}_j = \tilde{f}_{j-1} + \tilde{d}_{j-1}$$

$$\tilde{f}_j(t) = \sum_k \tilde{c}_k^j \phi_{l,k}(t) \in \tilde{V}_j$$

$$\tilde{f}_{j-1}(t) = \sum_k \tilde{c}_k^{j-1} \tilde{\phi}_{j-1,k}(t) \in \tilde{V}_{j-1}$$

$$\tilde{d}_{j-1}(t) = \sum_k \tilde{d}_k^{j-1} \tilde{\psi}_{j-1,k}(t) \in \tilde{W}_{j-1}$$

问题：已知 $c^j = \{c_k^j\}_{k\in Z}$ ，给出计算 $c^{j-1} = \{c_k^{j-1}\}_{k\in Z}$ ， $d^{j-1} = \{d_k^{j-1}\}_{k\in Z}$

的快速算法。

Mallat算法

$$\begin{cases} \phi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_n \phi(2t-n) \\ \tilde{\phi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{h}_n \tilde{\phi}(2t-n) \end{cases} \qquad \begin{cases} \psi(t) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-n) \\ \tilde{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{g}_n \tilde{\phi}(2t-n) \end{cases}$$

$$P_j f(t) = \sum_k c_k^j \phi_{j,k}(t) = \sum_k c_k^{j-1} \phi_{j-1,k}(t) + \sum_k d_k^{j-1} \psi_{j-1,k}(t)$$

$$\Big\Downarrow \text{利用双正交性质}$$

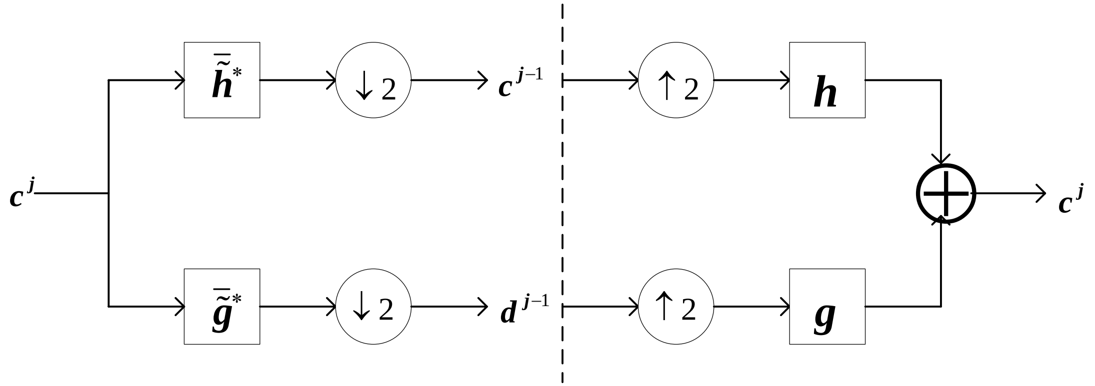
分解算法：

$$\begin{cases} c_k^{j-1} = \sum_n c_n^j \tilde{h}^*_{n-2k} \\ d_k^{j-1} = \sum_n c_n^j \tilde{g}^*_{n-2k} \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} c^{j-1} = D\left(c^j * \bar{\tilde{h}}^*\right) \\ d^{j-1} = D\left(c^j * \bar{\tilde{g}}^*\right) \end{cases}$$

重构算法：

$$c_k^j = \sum_n c_n^{j-1} h_{k-2n} + \sum_n d_n^{j-1} g_{k-2n} \Longleftrightarrow c^j = \left(Uc^{j-1}\right) * h + \left(Ud^{j-1}\right) * g$$

Mallat算法



$\left(\bar{\tilde{h}}^*, \bar{\tilde{g}}^*\right)$ 用做分析滤波器；　(h, g) 用做重构滤波器

$\tilde{\psi}$ 用做分析小波；ψ 用做重构小波

正交双多分辨分析与两尺度方程、小波方程

$\phi(t), \tilde{\phi}(t)$ 生成L²(R)的双正交多分辨分析$\{V_j, \tilde{V}_j; j \in Z\}$

? 第三章

$$\begin{cases} \phi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_n \phi(2t-n) \\ \tilde{\phi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{h}_n \tilde{\phi}(2t-n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \phi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_n \phi(2t-n) \\ \tilde{\phi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{h}_n \tilde{\phi}(2t-n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(t) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-n) \\ \tilde{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{g}_n \tilde{\phi}(2t-n) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \psi(t) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-n) \\ \tilde{\psi}(t) = \sqrt{2}\sum_n \tilde{g}_n \tilde{\phi}(2t-n) \end{cases}$$

小结

- $L^2(R)$空间
- 一维(正交)多分辨分析（MRA）
- MRA确定了：

  1）尺度空间，小波空间，两尺度方程与小波方程

  2） $L^2(R)$空间子空间正交和/直和分解关系

  3）低通滤波器与高通滤波器

  4）小波空间的结构

  5）构造正交小波的统一框架

  6）能量有限函数/信号的小波级数表示

  7）小波级数表示与小波变换之间的关系

  8）小波变换的快速算法---Mallat算法

随堂练习

1. $L^2(R)$是否有无穷多个多分辨分析？请解释一下。
2. 不同的尺度函数是否可以生成$L^2(R)$的同一个多分辨分析？请解释一下。
3. 若尺度函数的两尺度方程为

$$\phi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\phi(2t-k)$$

则 $h_k=\sqrt{2}\left\langle\phi(t),\phi(2t-k)\right\rangle$ ，该结论正确吗？

4. 写出$L^2(R)$意义下Haar多分辨分析的Haar尺度函数与小波的数学定义？
5. 描述多分辨分析构造正交小波的一般过程。

课程时间调整

- 从第5周开始，上课开始时间推迟一节课，周二下午2:20开始上课，5:05下课。