小波分析及其工程应用

孙 延奎

清华大学计算机系

2009.3.10

第2章 多分辨分析

- 小波分析重点研究能量有限空间$L^2(R)$平方可积空间及其函数的有效表示形式
- 多分辨分析的概念
- 用多分辨分析构造小波的基本方法
- 小波变换的快速算法---Mallat算法

第2章预备知识

函数的傅立叶变换

$$f(t) \in L^1(R) \Leftrightarrow \int_R |f(t)| dt < +\infty$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \left\langle f(t), e^{i\omega t} \right\rangle$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$ 条件?

$$\left\langle f, g \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle$$

- 绝对可积函数空间L^1(R)－－－性质

$f_1 * f_2(t)$	$\hat{f}_1(\omega)\,\hat{f}_2(\omega)$
$f(t-u)$	$e^{-iu\omega}\,\hat{f}(\omega)$
$e^{i\xi t} f(t)$	$\hat{f}(\omega-\xi)$
$f(t/s)$	$\lvert s\rvert\,\hat{f}(s\omega)$
$f^{(p)}(t)$	$(i\omega)^p\,\hat{f}(\omega)$

$$f_1 * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t-u) f_2(u)\,du$$

- **Z-**变换

  序列**a={a$_n$}**的**z**变换定义为：

$$a(z)=\sum a_n z^{-n}$$

- 序列的离散傅立叶变换

  序列**a={a$_n$}**的离散傅立叶变换定义为：

$$a(\omega)=\sum a_n e^{-in\omega}$$

两个重要的完备的内积空间

- 线性空间**:** 集合**+**线性运算（加法与数乘）
- 内积空间**:** 线性空间 **+** 内积运算

  内积定义：对于复矢量空间**V**，……

  1)正性；**2**）共轭对称性；**3**）均匀性；**4**）加性。

- 完备的内积空间**:** 内积空间**+** 对**limit**运算封闭

  n维欧氏空间R^n

  能量有限空间$L^2(R)$

Hilbert Space – Complete inner product space
完备的内积空间

Completeness (完备性): close for limit operation.

- **Natural** number (自然数) - close for addition "+" operation, not close for subtraction "-".
- **Integer** (整数) - close for addition, subtraction and multiplication "+", "-", "×", not close for division "÷".
- **Rational** number (有理数) – close for "+", "-", "×", "÷", not close for limit operation.

Example: $\pi = 3.14159265359323546 26\cdots$ is an irrational number (无理数)

Consider a sequence of rational numbers (有理数数列):

$$\{a_n\},\ \ a_1 = 3,\ \ a_2 = 3.1,\ \ a_3 = 3.14, \cdots \quad \text{are rational numbers.}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi \quad \text{is not a rational number.}$$

- **Real** number (实数) – close for "+", "-", "×", "÷" and limit operations. Therefore, R^n is Hilbert space.

Space L^2

L^2 ([a, b]) is Hilbert space as well as Bannach space

Definition : For an interval $a \leq t \leq b$, the **space L^2 ([a, b])** is the set of all square integrable functions defined on $a \leq t \leq b$. In other words,

$$L^2([a,b]) = \{f : [a,b] \to C;\ \int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty\}$$

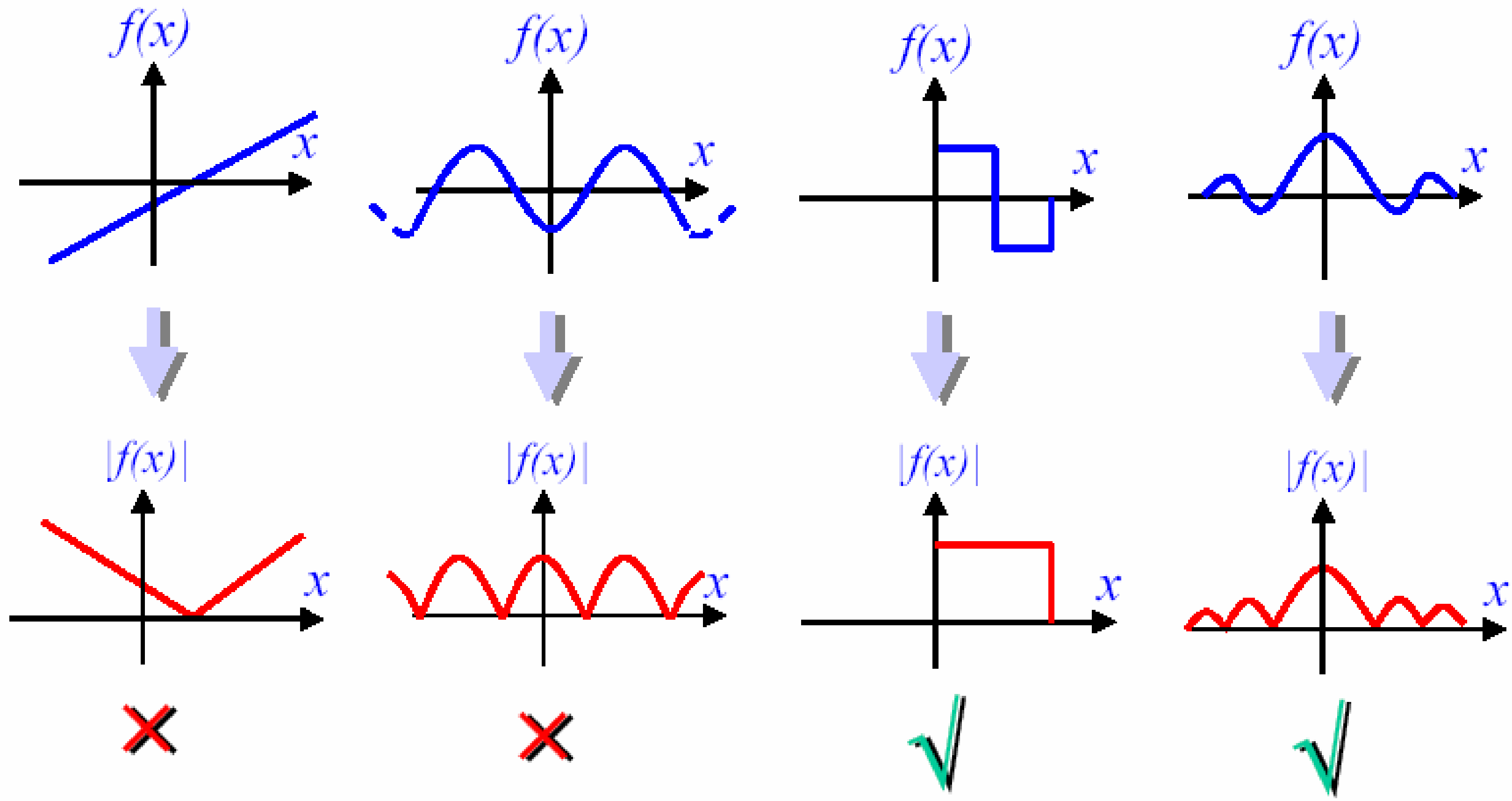
The condition $\int_a^b |f(t)|^2\, dt < \infty$

physically means that the total energy of the signal is finite (which is a reasonable class of signals to consider).

其中, **a,b**可以是正负无穷。

$$\boxed{f(x) \in \mathrm{L}^2(\mathrm{R})} \Longleftrightarrow \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 \, dt < \infty$$

***f*(*x*) is square interable**



教材中的相关例子

$L^2(R)$中函数的内积、函数的傅立叶变换的定义

见教材

小波研究的基本内容

- 寻找一个小波,使得它的二进伸缩和平移构成能量有限空间$L^2(R)$的一个标准正交基

$$\int_R \psi(t)dt = 0$$ 即 $\psi(t)$ 是一个小波 。

$$\left\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - k\right)\right\}_{j,k\in Z}$$ 构成 $L^2(R)$ 的标准正交基.

$$f(t) = \sum_j \sum_k c_{j,k}\psi_{j,k}(t) \qquad \sum_k \sum_j \left|c_{j,k}\right|^2 < \infty$$

- 给出快速计算小波系数$c_{j,k}$的算法

- 在实际中应用

一维正交多分辨分析MRA

回顾一下第1章中的Haar多分辨分析的概念:

$$V_0=\left\{f(t)\,|\,f(t)=c_0,0\le t<1\right\}$$

$$V_1=\left\{f(t)\,|\,f(t)=d_k,\frac{k}{2}\le t<\frac{k+1}{2},k=0,1\right\}$$

$$\cdots$$

$$V_j=\left\{f(t)\,|\,f(t)=e_k,\frac{k}{2^j}\le t<\frac{k+1}{2^j},k=0,1,\ldots,2^j-1\right\}$$

$V_0,V_1,V_2,\ldots,V_j,\ldots$构成$L^2([0,1])$上的一个嵌套的子空间序列.

$$V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_j\subset V_{j+1}\subset\cdots\to L^2[0,1]$$

$$f(t)\in V_j\Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$$

Haar尺度函数 $\phi(t)$ 构成V_0的基

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j$$

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t)+\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)$$

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)$$

$$\left\{\phi_{0,0},\psi_{0,0},\cdots,\psi_{j,0},\cdots,\psi_{j,2^j-1},\cdots\right\}$$

构成$L^2([0,1])$的一个标准正交基.

一维正交多分辨分析MRA

- $L^2(R)$上的**Haar**多分辨分析**{V_j}**

$$V_0=\left\{f(t)\mid f(t)=c_k, k\le t<k+1, \forall k\in Z, \sum_{k\in Z}|c_k|^2<+\infty\right\}$$

$$V_1=\left\{f(t)\mid f(t)=d_k, \frac{k}{2}\le t<\frac{k+1}{2}, \forall k\in Z, \sum_{k\in Z}|d_k|^2<+\infty\right\}$$

$$\cdots$$

$$V_j=\left\{f(t)\mid f(t)=e_k, \frac{k}{2^j}\le t<\frac{k+1}{2^j}, \forall k\in Z, \sum_{k\in Z}|e_k|^2<+\infty\right\} \qquad j\in Z$$

$$\cdots$$

$\ldots, V_{-2}, V_{-1}, V_0, V_1, V_2, \ldots, V_j, \ldots$构成$L^2(R)$上的一个嵌套的子空间序列.

$$\{0\}\leftarrow\cdots V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_j\subset\cdots\rightarrow L^2(R)$$

$$f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$$

$$f(t)\in V_0 \Leftrightarrow f(t-k)\in V_0$$

$\{\phi(t-k)\}_{k\in Z}$ 构成V_0的标准正交基

一维正交多分辨分析MRA

- $L^2(R)$上的**Haar**多分辨分析**$\{V_j\}$**

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

$$\phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t) + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)$$

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t) - \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)$$

$\left\{\phi_{j,k}\right\}_{k\in Z}$ 构成V_j的一个标准正交基.

$\left\{\psi_{j,k}\right\}_{k\in Z}$ 构成W_j的一个标准正交基.

$\left\{\psi_{j,k}\right\}_{j,k\in Z}$ 构成$L^2(R)$的一个标准正交基.

一维正交多分辨分析MRA

- $L^2(R)$上的**1次基数B样条**多分辨分析$\{V_j\}$

V_j中的函数在任意二进区间 $\left[n2^j,(n+1)2^j\right]$ $(n\in Z)$ 是线性的，在R上是连续的能量有限函数。即V_j中的函数是分片线性的、连续的。

可以证明：

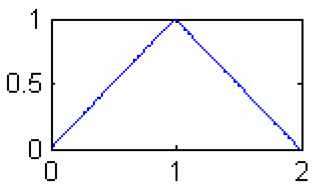
…, V_{-2},V_{-1},V_0,V_1,V_2,…,V_j,…构成$L^2(R)$上的一个嵌套的子空间序列.

$$\{0\}\leftarrow\cdots V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_j\subset\cdots\rightarrow L^2(R)$$

$$f(t)\in V_j\Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$$

$$f(t)\in V_0\Leftrightarrow f(t-k)\in V_0$$

$$N_2(t)=\begin{cases}t & 0\le t<1\\ 2-t & 1\le t<2\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$\{N_2(t-k)\}_{k\in Z}$ 构成V_0的一个Riesz基(P.36)，但不是标准正交基。

一维正交多分辨分析MRA

- $L^2(R)$上的1次基数B样条多分辨分析$\{V_j\}$

称$N_2(t)$是尺度函数，它生成$L^2(R)$上的1次基数B样条多分辨分析$\{V_j\}$ 。

两尺度方程为[一般证明见习题2.1，参见催锦泰一书]:

$$N_2(t)=\frac{1}{2}N_2(2t)+N_2(2t-1)+\frac{1}{2}N_2(2t-2)$$

其中，

$$N_2(t)=N_1(t)*N_1(t),N_1(t)=\phi(t)$$

一维正交多分辨分析MRA

- $L^2(R)$上的2次基数B样条多分辨分析$\{V_j\}$

V_j中的函数在任意二进区间 $\left[n2^j,(n+1)2^j\right]$ $(n\in Z)$ 是二次多项式，在R上是1次连续可导的能量有限函数。即V_j中的函数是分片二次的、连续可微的。可以证明：

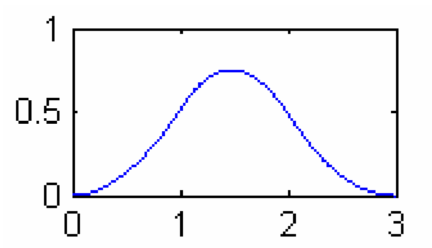
…, $V_{-2},V_{-1},V_0,V_1,V_2,\ldots,V_j,\ldots$构成$L^2(R)$上的一个嵌套的子空间序列.

$$\{0\}\leftarrow\cdots V_{-1}\subset V_0\subset V_1\subset\cdots\subset V_j\subset\cdots\to L^2(R)$$

$$f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$$

$$f(t)\in V_0 \Leftrightarrow f(t-k)\in V_0$$

$$N_3(t)=\begin{cases}\frac{1}{2}t^2 & 0\le t<1\\ \frac{3}{4}-\left(t-\frac{3}{2}\right)^2 & 1\le t<2\\ \frac{1}{2}(t-3)^2 & 2\le t<3\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$



$\{N_3(t-k)\}_{k\in Z}$ 构成V_0的一个Riesz基，但不是标准正交基。

一维正交多分辨分析MRA

- $L^2(R)$上的2次基数**B**样条多分辨分析$\{V_j\}$

称$N_3(t)$是尺度函数，它生成$L^2(R)$上的2次基数**B**样条多分辨分析$\{V_j\}$。

两尺度方程为：

$$N_3(t)=\frac{1}{4}N_3(2t)+\frac{3}{4}N_3(2t-1)+\frac{3}{4}N_3(2t-2)+\frac{1}{4}N_3(2t-3)$$

其中，

$$N_3(t)=N_2(t)*N_1(t)$$

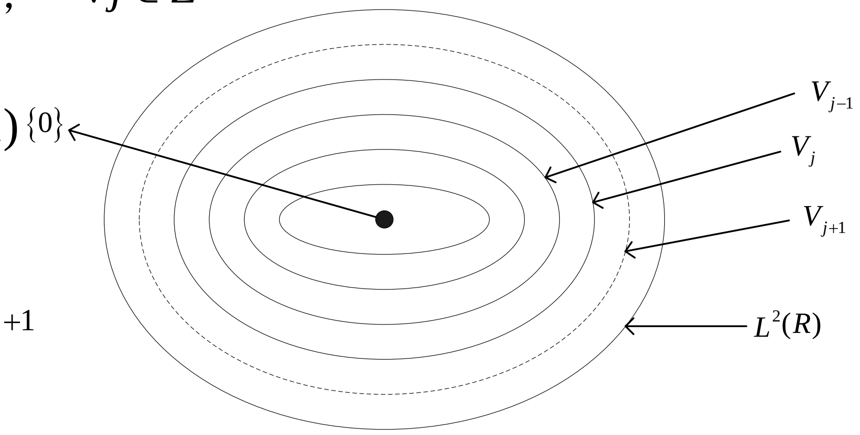
- $L^2(R)$上的3次基数**B**样条多分辨分析$\{V_j\}$？
- $L^2(R)$上的m次基数**B**样条多分辨分析$\{V_j\}$？

一维正交多分辨分析MRA

令 V_j ，$j=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 是$L^2(R)$中的一个函数子空间序列。若下列条件成立：

1) 单调性：$\cdots\subset V_{j-1}\subset V_j\subset V_{j+1}\subset\cdots$ ，　$\forall j\in Z$

2) 逼近性：$\bigcap\limits_{j\in Z}V_j=\{0\}$，　$\overline{\bigcup\limits_{j\in Z}V_j}=L^2(R)$



3) 伸缩性：$f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$

4) 平移不变性：$f(t)\in V_0 \Leftrightarrow f(t-k)\in V_0$

5) **Riesz** 基存在性：存在函数 $\varphi\in V_0$，使 $\{\varphi(t-k)\}_{k\in Z}$ 构成 V_0 的一个Riesz基（不一定是正交的）。

φ 称为尺度函数。$\{V_j, j\in Z\}$ 称为由 φ 生成的多分辨分析。

两尺度方程

$$\varphi_{j,k}(t)=2^{j/2}\varphi\left(2^j t-k\right),\ j,k\in Z$$

- $\varphi_{j,k}(t)$， $k\in \mathrm{Z}$ 线性无关.
- 存在常数*A*和*B*, $0<A\le B<\infty$, 使得对 V_j 中任意有限能量函数$f_j(t)$,有

$$f_j(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_{j,k}\varphi_{j,k}(t) \qquad A\|f_j\|_2^2\le\sum_j\sum_k\left|c_{j,k}\right|^2\le B\|f_j\|_2^2$$

$\Longleftrightarrow$ $\left\{\varphi_{j,k}(t)\right\}_{k\in Z}$ V_j Reisz基

$$\varphi\left(t\right)\in V_0\subset V_1$$

$$\varphi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\varphi(2t-k) \quad \left\{h_k\right\}_{k\in Z}\in l^2 \qquad \text{(两尺度方程)}$$

正交尺度函数的构造

问题：若 $\varphi(t)$生成多分辨分析**{V$_j$}, **则是否存在一个正交尺度函数 $\phi(t)$ 生成同一个多分辨分析**{V$_j$}?**

令 V_j ，$j=\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots$ 是$L^2(R)$中的一个函数子空间序列。若下列条件成立：

1) 单调性：$\cdots\subset V_{j-1}\subset V_j\subset V_{j+1}\subset\cdots$ ， $\forall j\in Z$

2) 逼近性：$\bigcap_{j\in Z} V_j=\{0\}$， $\overline{\bigcup_{j\in Z} V_j}=L^2(R)$

3) 伸缩性：$f(t)\in V_j \Leftrightarrow f(2t)\in V_{j+1}$

4) 平移不变性：$f(t)\in V_0 \Leftrightarrow f(t-k)\in V_0$

5) 正交基存在性：存在函数 $\phi\in V_0$， 使 $\{\phi(t-k)\}_{k\in Z}$ 构成 V_0 的一个标准正交基 。

正交尺度函数的构造

按照习题2.1，

$\left\{\phi(t-n)\right\}_{n\in Z}$ 是标准正交系的充分必要条件是：

$$\sum_{k\in Z}\left|\hat{\phi}(\omega+2k\pi)\right|^2=1,\forall\omega\in R$$

由此，可得如下的正交化方法：

$$\hat{\phi}(\omega)=\frac{\hat{\varphi}(\omega)}{\left[\sum_{k\in Z}\left|\hat{\varphi}(\omega+2k\pi)\right|^2\right]^{1/2}}$$

$\varphi \longrightarrow$ 尺度函数

$\phi \longrightarrow$ 正交尺度函数

两尺度方程

正交尺度函数 ϕ

两尺度方程: $\phi(t)=\sqrt{2}\sum_k h_k\phi(2t-k)$

$$h_k=\left\langle \phi(t),\sqrt{2}\phi(2t-k)\right\rangle$$ **{h$_k$}**称为低通滤波器系数

可以证明,

$\left\{\phi_{j,k}\right\}_{k\in Z}$ 构成V$_j$的一个标准正交基.

问:

$\left\{\phi_{j,k}\right\}_{j,k\in Z}$ 是否构成L^2(R)的一个标准正交基?

MRA确定了L²(R)的子空间直和分解关系

尺度空间

$$V_{j+1}=V_j\oplus W_j$$

小波空间

$$L^2(R)=\bigoplus_{j=-\infty}^{+\infty}W_j$$

问题：

W_j 的结构如何?如何构造小波 ψ ，使 $\{\psi_{j,k}\}_{k\in Z}$ 构成 W_j 的标准正交基？从而 $\{\psi_{j,k}\}_{j,k\in Z}$ 构成 $L^2(R)$ 的标准正交基。

$$\left\{\psi_{j,k}=2^{j/2}\psi\left(2^jt-k\right)\right\}_{k\in Z}\qquad \int_R\psi(t)\,dt=0$$

低通滤波器的性质

- 相应于正交尺度函数的低通滤波器具有如下性质

$$\sum_{k\in Z} h_{k-2l} h^*_{k-2m} = \delta_{l,m}$$

$$\sum_{k\in Z} \left| h_k \right|^2 = 1$$

$$\sum_{k\in Z} h_k = \sqrt{2}$$

$$\sum_{k\in Z} h_{2k} = \sum_{k\in Z} h_{2k+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

正交小波函数的构造

定理2.1　　令 $g_k = (-1)^k h^*_{1-k}$ ，$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-n)$

则

$$\left\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - k\right)\right\}_{k\in Z}$$ 是 W_j 的标准正交基.

$$\left\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - k\right)\right\}_{j,k\in Z}$$ 构成 $L^2(R)$ 的标准正交基。

$\{g_k\}$　高通滤波器.　一个重要性质：$\sum_k g_k = 0$

$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_n g_n \phi(2t-n)$　　小波方程

$\psi(t)$　　正交小波 见（2－17）、（2－18）

MRA确定了构造正交小波的统一框架.

- 多分辨分析（**Multiresolution Analysis,MRA**）构造正交小波基

MRA ⟹ **(**非正交**)**尺度函数 $\varphi(t)$

正交化

⟹ 正交尺度函数 $\phi(t)$

两尺度方程

⟹ 低通滤波器 $\{h_k\}_{k\in Z}$

⟹ 高通滤波器 $\{g_k\}_{k\in Z}$

小波方程

⟹ 小波函数 $\psi(t)$

MRA $\longrightarrow$ $\varphi(t)\to\phi\to h\to g\to\psi(t)$ 时域求解过程

作业

- 课后部分

  习题二任选二题

联系方式:

姓名:
系别:
联系电话: 包括手机/宿舍电话
Email地址:
导师姓名:
研究方向:

希望和建议(讨论):围绕选学该课程的目的谈一些你的想法，以便教学参考。