小波分析及其工程应用

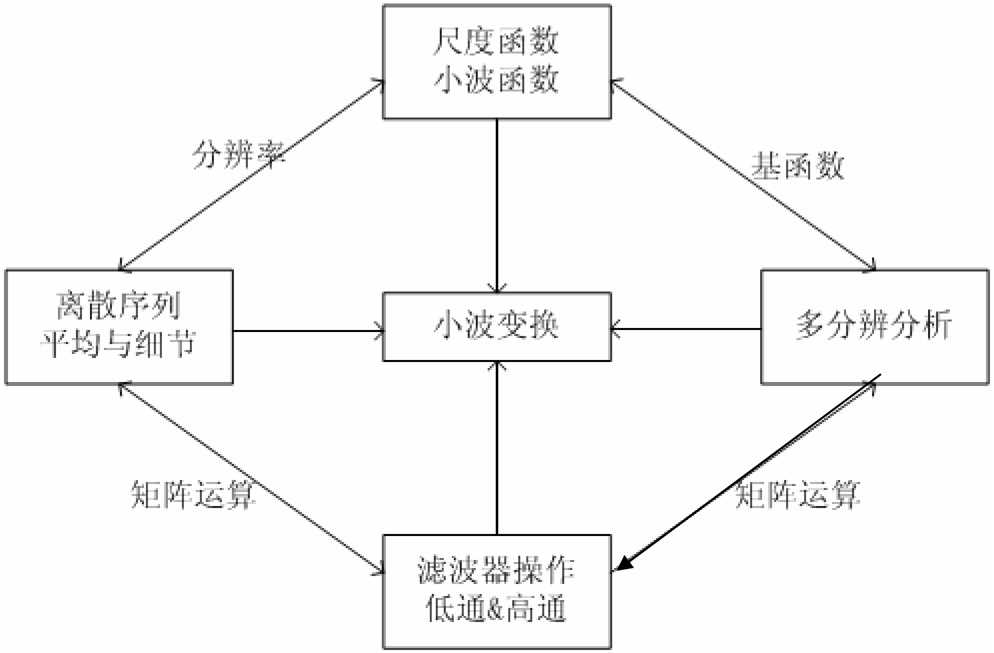
孙 延奎

清华大学计算机系

2009.3.3

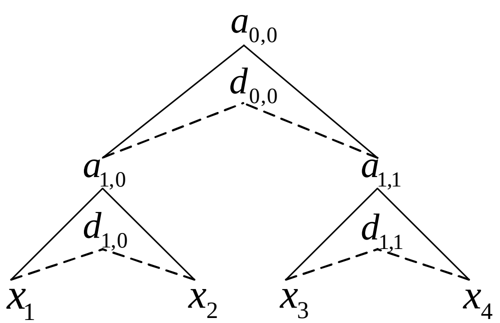
第1章 Haar小波分析

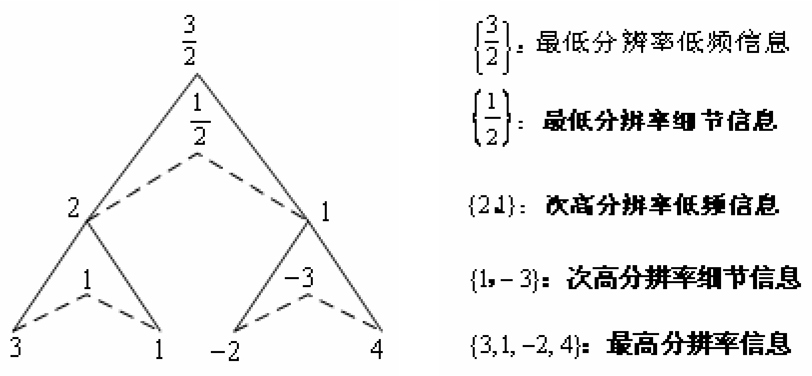
1. 前言



1.2 平均与细节

目的： 通过求平均与细节运算,引入离散信号的多分辨表示及其小波变换的概念。





几点说明:

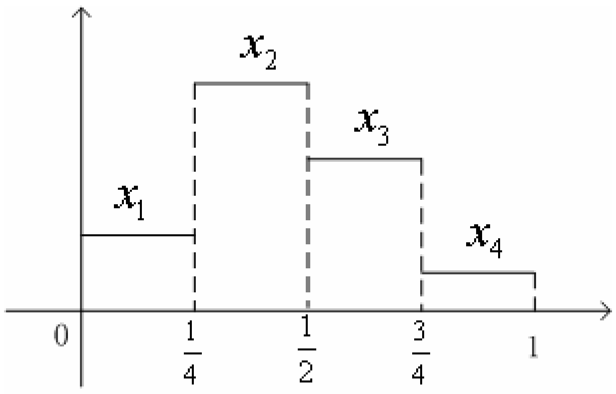
多分辨表示与数据压缩

低频系数的意义

小波变换的结果与具体操作相关

信号长度问题

1.3 尺度函数与小波函数

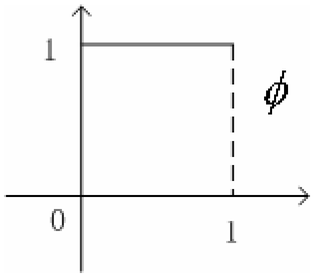


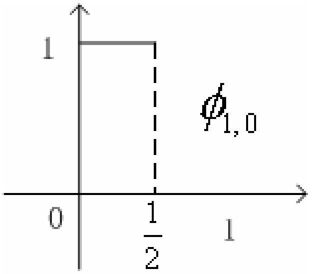
目的：引入尺度函数与小波函数的概念，介绍一个函数的多分辨表示及其与尺度函数、小波函数、小波变换间的关系。同时，引入尺度方程与小波方程的概念。

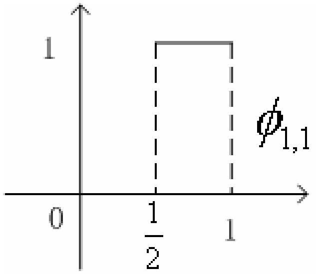
$$f(t)=x_1X_{[0,1/4)}(t)+x_2X_{[1/4,1/2)}(t)+x_3X_{[1/2,3/4)}(t)+x_4X_{[3/4,1)}(t)$$

$X_{[1/4,2/4)}, X_{[2/4,3/4)}, X_{[3/4,1)}$ 与 $X_{[0,1/4)}$ 之间的关系?

$X_{[0,1/4)}$ 与 $X_{[0,1)}$ 之间的关系?







$$\phi_{j,k}(t)=\phi(2^j t-k) \qquad k=0,1,\cdots,2^j-1$$

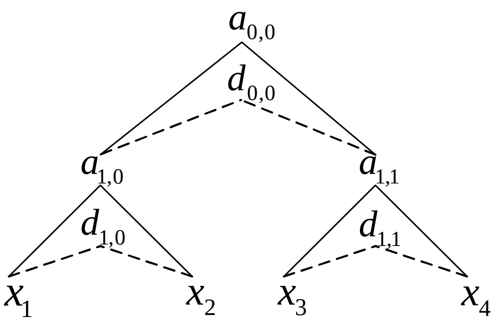
$$f(t)=x_1\phi_{2,0}(t)+x_2\phi_{2,1}(t)+x_3\phi_{2,2}(t)+x_4\phi_{2,3}(t)$$

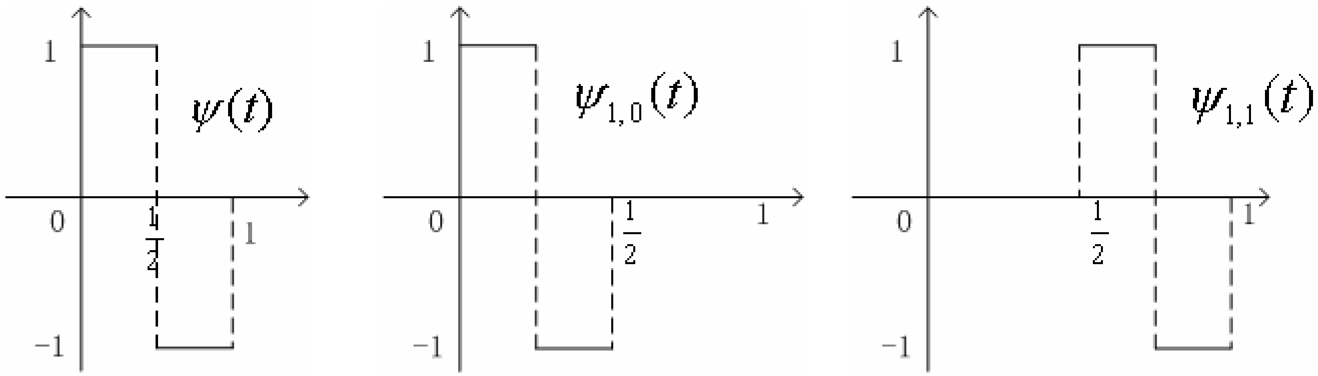
1.3 尺度函数与小波函数

$$\phi_{0,0}(t)=\phi(t)$$

$$\phi_{1,0}(t),\phi_{1,1}(t)$$

$$\phi_{2,0}(t),\phi_{2,1}(t),\phi_{2,2}(t),\phi_{2,3}(t)$$





$$f(t)=a_{1,0}\phi_{1,0}(t)+a_{1,1}\phi_{1,1}(t)+d_{1,0}\psi_{1,0}(t)+d_{1,1}\psi_{1,1}(t)$$

$$f(t)=a_{0,0}\phi_{0,0}(t)+d_{0,0}\psi_{0,0}(t)+d_{1,0}\psi_{1,0}(t)+d_{1,1}\psi_{1,1}(t)$$

$$\psi_{0,0}(t)=\psi(t)$$

$$\psi_{1,0}(t),\psi_{1,1}(t)$$

1.3 尺度函数与小波函数

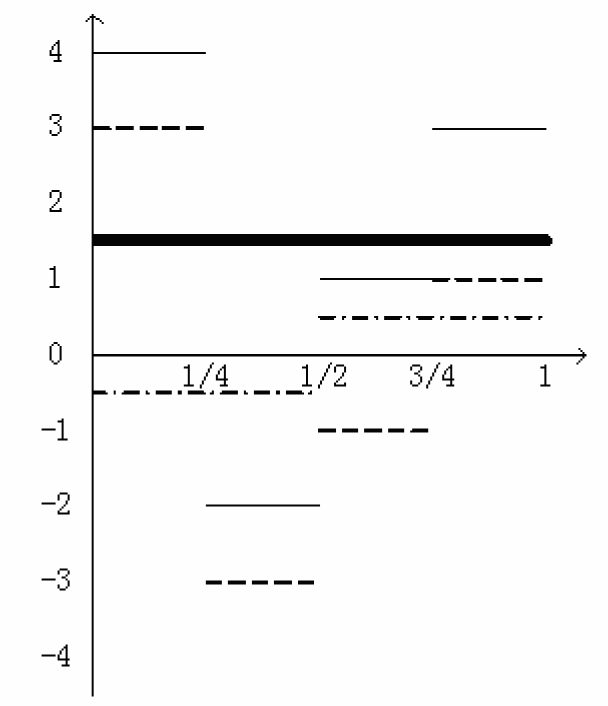
函数的多分辨逼近表示**:**

两尺度方程**:** $\phi(t)=\phi(2t)+\phi(2t-1)$ 或 $\phi(t)=\phi_{1,0}(t)+\phi_{1,1}(t)$

小波方程: $\psi(t)=\phi_{1,0}(t)-\phi_{1,1}(t)$

例**1.1 (P8)**

$$f(t)=4\phi_{2,0}(t)-2\phi_{2,1}(t)+\phi_{2,2}(t)+3\phi_{2,3}(t)$$
$$=\frac{3}{2}\phi_{0,0}(t)-\frac{1}{2}\psi_{0,0}(t)+3\psi_{1,0}(t)-\psi_{1,1}(t)$$



细实线：原信号

粗实线：总平均值

点划线：低分辨率细节

虚线：高分辨率细节

1.4 多分辨分析

目的：引入尺度空间和小波空间的概念，尺度空间与尺度函数、小波空间与小波函数之间的关系。了解多分辨分析的含义。

预备知识： 函数空间特别是线性代数中内积空间、正交和、正交补、基

1.4 多分辨分析

从函数空间的高度认识函数的多分辨表示. 多分辨分析中有两个函数空间: 尺度空间和小波空间.本节以**Haar**小波为例说明多分辨分析的概念。

令V_n表示所有在区间$[0, 1/2^n),\ldots, [(2^n-1)/2^n,1)$上分别为常数的函数空间.则 $V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \cdots$

定义内积: $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t) g^*(t) dt$

则V_n构成一个内积空间,称之为尺度空间. $\{\phi_{n,k}; k = 0,1,\cdots,2^n - 1\}$

构成V_n的一个正交基.

令 $W_j = \{h \in V_{j+1} : \langle h, f \rangle = 0, \forall f \in V_j\}$ 即 $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$

W_j 称为小波空间. $\{\psi_{j,k}; k = 0,1,\cdots,2^j - 1\}$ 构成W_j的一个正交基.

1.4 多分辨分析

$$V_{n+1}=V_n\oplus W_n=V_{n-1}\oplus W_{n-1}\oplus W_n=\cdots=V_0\oplus W_0\oplus W_1\oplus\cdots\oplus W_n$$

$$f_{n+1}=f_n+w_n=f_{n-1}+w_{n-1}+w_n=\cdots=f_0+w_0+w_1+\cdots+w_n$$

$$f_j=\sum_{k=0}^{2^j-1}a_{j,k}\phi_{j,k}\in V_j,\ j=0,1,\cdots,n+1;\ w_j=\sum_{k=0}^{2^j-1}d_{j,k}\psi_{j,k}\in W_j,\ j=0,1,\cdots,n$$

$\left\{a_{0,0},d_{0,0},\cdots,d_{n,0},\cdots,d_{n,2^n-1}\right\}$ 是 $\left\{a_{n+1,0},a_{n+1,1},\cdots,a_{n+1,2^{n+1}-1}\right\}$ 的小波变换**.**

f_{n+1}的多分辨逼近表示**: $f_0,f_1,\ldots\ldots,f_n$**

称 $\{V_j;j=0,1,\cdots\}$ 为由**Haar**尺度函数 ϕ 生成的多分辨分析。

1.5 小波变换的快速计算

问题: 如何计算$\boldsymbol{f_{n+1}}$的多分辨表示**?**这等价于

如何计算 $\left\{a_{n,0},\cdots,a_{n,2^n-1}\right\}$ 的小波变换**?**这等价于

如何从 $\left\{a_{n,0},\cdots,a_{n,2^n-1}\right\}$ 快速地计算出它的一级小波变换

$\left\{a_{n-1,0},\cdots,a_{n-1,2^{n-1}-1},d_{n-1,0},\cdots,d_{n-1,2^{n-1}-1}\right\}$?

目标：给出小波变换的快速算法

1.5 小波变换的快速计算

标准化尺度函数和小波函数的概念:

$$\phi_{j,k}(t)=\sqrt{2^j}\phi(2^j t-k),\qquad k=0,1,\cdots,2^j-1$$

$$\psi_{j,k}(t)=\sqrt{2^j}\psi(2^j t-k),\qquad k=0,1,\cdots,2^j-1$$

性质：不同分辨率下的小波函数及尺度函数具有相同的能量.

$$\left\|\phi_{j,k}\right\|=1$$

$$\left\|\psi_{j,k}\right\|=1$$

两尺度方程和小波方程变为：

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t)+\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)$$

$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)$$

1.5 小波变换的快速计算

性质：各级小波变换的能量相同

$$f(t)=a_{n-1,0}\phi_{n-1,0}(t)+\cdots+a_{n-1,2^{n-1}-1}\phi_{n-1,2^{n-1}-1}(t)+d_{n-1,0}\psi_{n-1,0}(t)+\cdots+d_{n-1,2^{n-1}-1}\psi_{n-1,2^{n-1}-1}(t)$$

$$\sum_{k=0}^{2^n-1}\left|a_{n,k}\right|^2=\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left|a_{n-1,k}\right|^2+\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1}\left|d_{n-1,k}\right|^2$$

快速计算公式:

$$a_{n-1,k}=(a_{n,2k}+a_{n,2k+1})/\sqrt{2}\qquad k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1$$

$$d_{n-1,k}=(a_{n,2k}-a_{n,2k+1})/\sqrt{2}\qquad k=0,1,\cdots,2^{n-1}-1$$

标准化的求平均与细节的公式

$$\begin{bmatrix}
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \cdot & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\
\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} & \cdot & \cdot & \cdot & 0\\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\
0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} a_{n,0}\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{n,2^n-1}\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} a_{n-1,0}\\ \cdot\\ \cdot\\ a_{n-1,2^{n-1}-1}\\ d_{n-1,0}\\ \cdot\\ \cdot\\ d_{n-1,2^{n-1}-1}\end{bmatrix}$$

1.5 小波变换的快速计算

$$a^n=\begin{bmatrix} a_{n,0} \\ \vdots \\ a_{n,2^n-1} \end{bmatrix}\quad a^{n-1}=\begin{bmatrix} a_{n-1,0} \\ \vdots \\ a_{n-1,2^{n-1}-1} \end{bmatrix}\quad d^{n-1}=\begin{bmatrix} d_{n-1,0} \\ \vdots \\ d_{n-1,2^{n-1}-1} \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_n \\ \cdots \\ \mathbf{D}_n \end{bmatrix} a^n=\begin{bmatrix} a^{n-1} \\ \cdots \\ d^{n-1} \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{n-1} \\ \cdots \\ \mathbf{D}_{n-1} \end{bmatrix} a^{n-1}=\begin{bmatrix} a^{n-2} \\ \cdots \\ d^{n-2} \end{bmatrix}\quad \begin{bmatrix} a^0 \\ d^0 \\ d^1 \\ \vdots \\ d^{n-1} \end{bmatrix}$$

分解过程可用以下矩阵等式表示:

$$a^{j-1}=\mathbf{A}_j a^j$$
$$d^{j-1}=\mathbf{D}_j a^j$$

$$\begin{tikzcd}
a^n \arrow[r, "\mathbf{A}_n"] \arrow[dr, "\mathbf{D}_n"'] & a^{n-1} \arrow[r, "\mathbf{A}_{n-1}"] \arrow[dr, "\mathbf{D}_{n-1}"'] & a^{n-2} \arrow[r, "\mathbf{A}_{n-2}"] \arrow[dr, "\mathbf{D}_{n-2}"'] & {} & {} \arrow[r, "\mathbf{A}_1"] \arrow[dr, "\mathbf{D}_1"'] & a^0 \\
& d^{n-1} & d^{n-2} & {} & & d^0
\end{tikzcd}$$

小波变换分解过程示意图

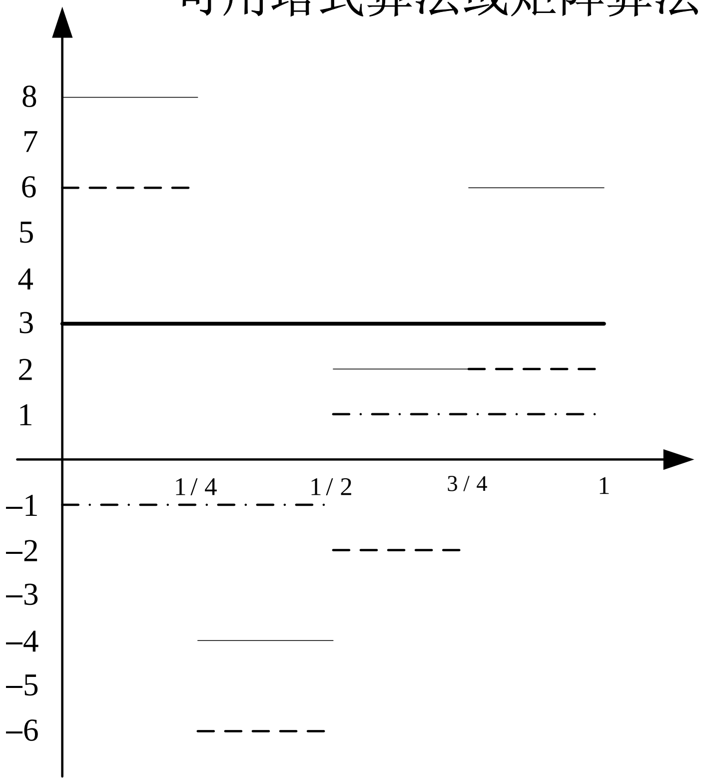
快速小波变换（**FWT**）的计算复杂度为**O(*N*)**

1.5 小波变换的快速计算

例**1.2** (P14) $f(t)=4\phi_{2,0}(t)-2\phi_{2,1}(t)+\phi_{2,2}(t)+3\phi_{2,3}(t)$

$$f(t)=4\phi_{2,0}(t)-2\phi_{2,1}(t)+\phi_{2,2}(t)+3\phi_{2,3}(t)$$
$$=3\phi_{0,0}(t)-\psi_{0,0}(t)+3\sqrt{2}\psi_{1,0}(t)-\sqrt{2}\psi_{1,1}(t)$$

可用塔式算法或矩阵算法计算小波变换.



细实线: 原信号

粗实线: 总平均值

点划线: 低分辨率细节

虚线: 高分辨率细节

1.6 逆小波变换

对于 $0 < j \le n$,有：

$$a_{j,2k} = (a_{j-1,k} + d_{j-1,k}) / \sqrt{2}, k = 0,1,\cdots,2^{j-1}-1$$

$$a_{j,2k+1} = (a_{j-1,k} - d_{j-1,k}) / \sqrt{2}, k = 0,1,\cdots,2^{j-1}-1$$

$$a^j = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_j^T & | & \mathbf{D}_j^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a^{j-1} \\ - \\ d^{j-1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}_j^T a^{j-1} + \mathbf{D}_j^T d^{j-1}$$

$$\begin{tikzcd}
a^0 \arrow[r, "\mathbf{A}_1^T"] & a^1 \arrow[r, "\mathbf{A}_2^T"] & \cdots a^{n-2} \arrow[r, "\mathbf{A}_{n-1}^T"] & a^{n-1} \arrow[r, "\mathbf{A}_n^T"] & a^n \\
d^0 \arrow[ur, "\mathbf{D}_1^T"] & d^1 \arrow[ur, "\mathbf{D}_2^T"] & \cdots d^{n-2} \arrow[ur, "\mathbf{D}_{n-1}^T"] & d^{n-1} \arrow[ur, "\mathbf{D}_n^T"] &
\end{tikzcd}$$

1.7 小波变换的滤波器组实现——Mallat算法

目的： 以上给出了离散信号序列的塔式算法、用矩阵运算给出的小波变换的快速递归计算，这里将给出一种等价的滤波器组实现，主要是通过卷积计算得到的，更具有一般性。

预备知识：离散序列的卷积、二通道滤波器组及相关概念、等价性验证

1.7 小波变换的滤波器组实现——Mallat算法

1.7.1 离散序列的卷积

$$a = \{a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m\} \quad l(a) = m+1$$

$$b = \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_k\} \quad l(b) = k+1$$

$$(a * b)_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0 = \sum_k a_k b_{n-k} \quad l(a * b) = l(a) + l(b) - 1$$

初始状态	中间状态	最终状态
$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$	$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$	$a_0, a_1, a_2, \cdots, a_m$
$b_k, \cdots, b_2, b_1, b_0 \longrightarrow$	$b_k, \cdots, b_2, b_1, b_0$	$b_k, \cdots, b_2, b_1, b_0$
	k+1次移动	又移动m次

$b = \{b_0, b_1, b_2, \cdots, b_k\}$ 反转后向右逐个滑动,起滤波器的作用.

1.7 小波变换的滤波器组实现——Mallat算法

1.7.1 离散序列的卷积

对无限序列: $(a*b)_n = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k b_{n-k}$ $\quad (a*b)[n] = \sum_k a[k]b[n-k]$

其他计算方法: 用"手势"模拟卷积 ;卷积图 ;Z域中的卷积

利用z变换的性质: $a(z)b(z) = \left(a*b\right)(z)$

$$a = \{a_0, a_1\} = \{3, 2\} \leftrightarrow a(z) = \sum_k a_k z^{-k} = 3 + 2z^{-1}$$

$$b = \{b_0, b_1, b_2\} = \{1, 2, -1\} \leftrightarrow b(z) = \sum_k b_k z^{-k} = 1 + 2z^{-1} - z^{-2}$$

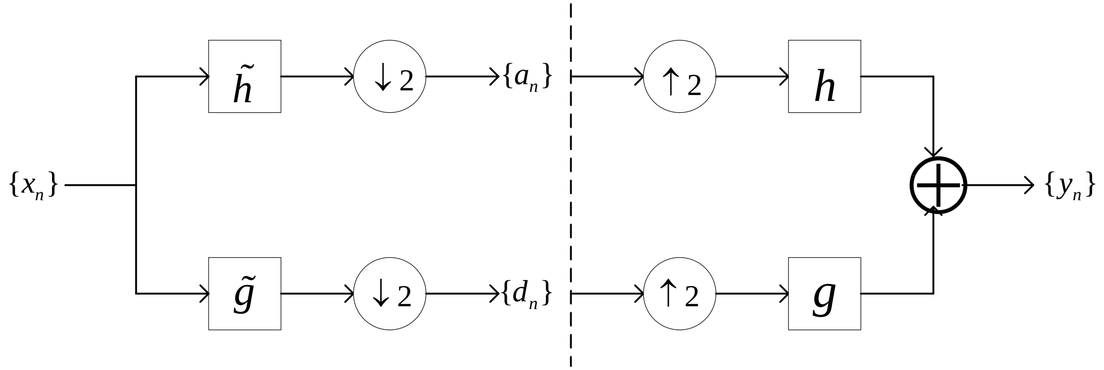
$$a*b \leftrightarrow a(z)b(z) = \sum_k (a*b)_k z^{-k} \quad a(z)b(z) = (3+2z^{-1})(1+2z^{-1}-z^{-2})$$

$$= 3 + (2+6)z^{-1} + (-3+4)z^{-2} - 2z^{-3}$$

$$= 3 + 8z^{-1} + 1z^{-2} - 2z^{-3}$$

1.7 小波变换的滤波器组实现——Mallat算法

1.7.2 二通道滤波器组



（二元）下抽样（**Down sampling**）用 $\downarrow 2$ 表示**:**

$$x = (\cdots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \cdots) \quad Dx = (\cdots, x_{-2}, x_0, x_2, \cdots) \quad (Dx)_k = x_{2k}, k \in Z$$

（二元）上抽样（**Up sampling**）用 $\uparrow 2$ 表示

$$Ux = \{\cdots, x_{-1}, 0, x_0, 0, x_1, 0, x_2, \cdots\} \quad (Ux)_k = \begin{cases} 0 \quad , & \text{若}k\text{为奇数} \\ x_{k/2}, & \text{若}k\text{为偶数} \end{cases}$$

低通高通滤波器、分析滤波器与合成滤波器。

1.7 小波变换的滤波器组实现——Mallat算法

1.7.3 小波变换的滤波器组算法

根据两尺度方程与小波方程确定低通、高通滤波器。

$$\phi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t)+\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)$$
$$\psi(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,0}(t)-\frac{1}{\sqrt{2}}\phi_{1,1}(t)$$

$$\Rightarrow$$

$$h=\{h_0,h_1\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$g=\{g_0,g_1\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},-\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

$$g_n=(-1)^n h_{1-n}$$

h,g 可用于合成滤波器组。通过滤波器的时序反转，确定分析滤波器组的低通、高通滤波器。

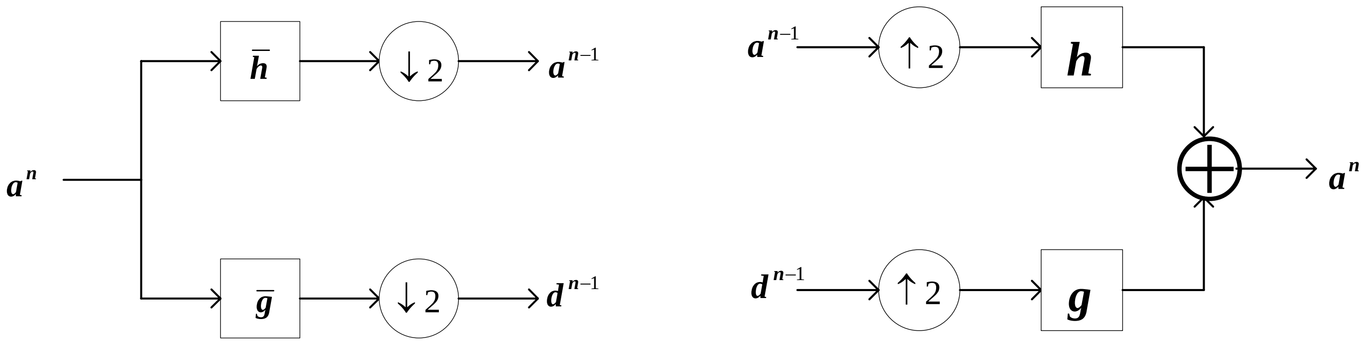
$$\bar{h}=\{\bar{h}_n\}$$
$$\Rightarrow$$
$$\bar{h}_n=h_{-n}$$

$$\bar{h}=\{\cdots,0,h_1,\overset{\downarrow}{h_0},0,\cdots\}$$
$$\bar{g}=\{\cdots,0,g_1,\underset{\uparrow}{g_0},0,\cdots\}$$

$$\bar{h}=\{\bar{h}_{-1},\bar{h}_0\}=\left\{\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$
$$\bar{g}=\{\bar{g}_{-1},\bar{g}_0\}=\left\{-\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$$

1.7　小波变换的滤波器组实现——Mallat算法

1.7.3　小波变换的滤波器组算法

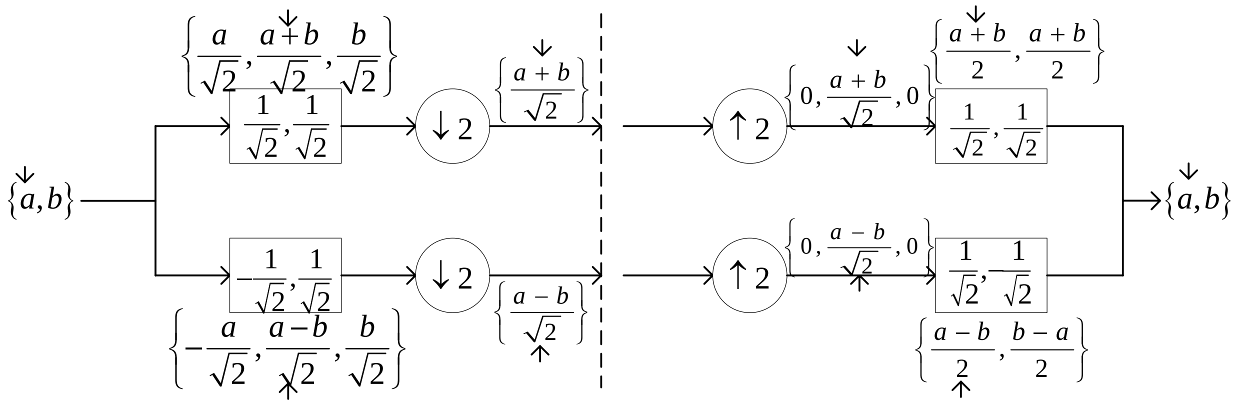


讨论表明, **Haar**小波的平均与细节提取操作,与滤波器组中分析滤波器的运算结果相同. 重构也有类似的结果.

1.7 小波变换的滤波器组实现——Mallat算法

1.7.3 小波变换的滤波器组算法

例**1.4 (P23)**



采用其他滤波器组还有其他实现方法，更多的例子见教材。

0下标处

0下标

1.8 Haar小波变换的提升实现

目的：给出**Haar**小波变换的提升算法实现，初步认识这种方法与卷积实现方法的不同及其优点。

求平均与细节的 几种方法：

$$s = \frac{a+b}{2} \qquad d = \frac{a-b}{2}$$

$$s = \frac{a+b}{\sqrt{2}} \qquad d = \frac{a-b}{\sqrt{2}}$$

$$s = \frac{a+b}{2} \qquad d = b-a$$

1.8 小波变换的提升实现

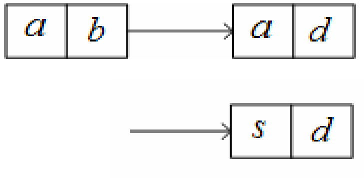
1.8.1 Haar小波变换

现以第三种方法为例说明小波变换提升算法实现的优点.

√ 提升算法

$$s = \frac{a+b}{2}$$
$$d = b - a$$

$$d = b - a$$
$$s = a + d/2$$



优点之一： 原位（**in-place** ）操作

优点之二： 逆小波变换很容易由正向小波变换通过改变计算顺序和改变“**+**”、“**-**”号

正向变换: $b -= a$ $a += b/2$

逆向变换: $a -= b/2$ $b += a$

1.8 小波变换的提升实现

1.8.2 Haar提升算法

$$s^j = \{s_{j,l} \mid 0 \le l < 2^j\} \xrightarrow{\text{一次Haar小波分解}} s^{j-1} \quad d^{j-1}$$

一般地，小波变换的提升算法由三步组成：split，predict和update。

Split：将信号分解成奇偶序列，记为 $even_{j-1}$ 和 odd_{j-1}

Predict: 偶子集与奇子集是高度相关的，可以用一个来预测另一个，记下预测误差。如

$$d_{j-1,l} = s_{j,2l+1} - s_{j,2l}$$

Update:低频信号的一个关键性质是，它与原信号应具有相同的平均值．即

$$S = 2^{-j}\sum_{l=0}^{2^j-1} s_{j,l}$$ 与分辨率j无关。

取 $s_{j-1,l} = s_{j,2l} + d_{j-1,l}/2$ 可满足该要求。

正向小波变换

Split:

$$even_{j-1} = \{s_{j,2l} \mid 0 \le l \le 2^{j-1} - 1\}$$

$$odd_{j-1} = \{s_{j,2l+1} \mid 0 \le l \le 2^{j-1} - 1\}$$

Predict: $d_{j-1,l} = s_{j,2l+1} - s_{j,2l}$

Update: $s_{j-1,l} = s_{j,2l} + d_{j-1,l} / 2$

逆向小波变换

$$s_{j,2l} = s_{j-1,l} - d_{j-1,l} / 2$$

$$s_{j,2l+1} = d_{j-1,l} + s_{j,2l}$$

$$s_j = Merge(even_{j-1}, odd_{j-1})$$

如果用伪码实现,则正向变换与逆向变换之间的关系更明确.

进一步的思考

- 一般提升算法会有哪些不同呢？

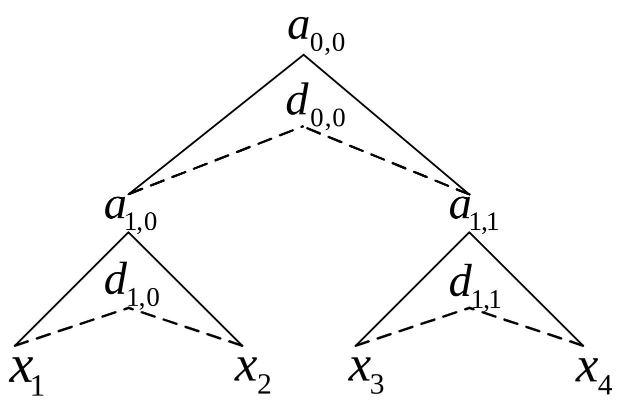
  Predict:

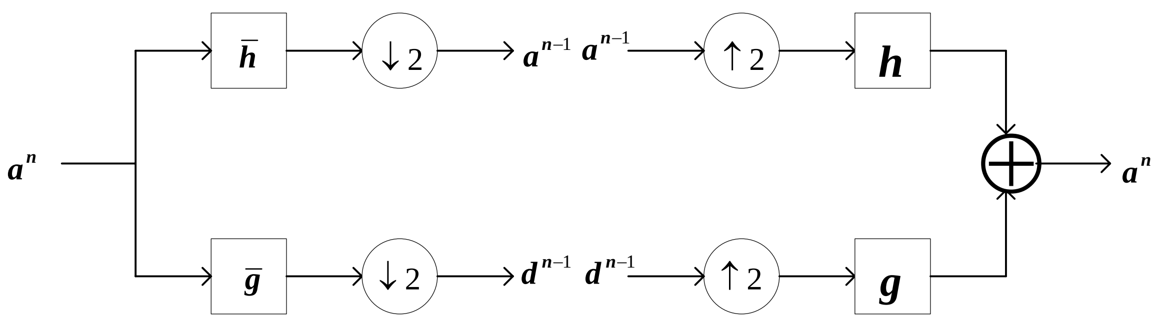
  Update:

小结

1.小波变换及其计算

- 求平均与细节(介绍几种)
- 滤波器实现即**Mallat**算法





- 矩阵算法及提升算法

- 矩阵算法及提升算法

√ 矩阵算法

$$a^{j-1} = \mathbf{A}_j a^j \qquad a^j = \mathbf{A}_j^T a^{j-1} + \mathbf{D}_j^T d^{j-1}$$

$$d^{j-1} = \mathbf{D}_j a^j$$

√ 提升算法

$$s = \frac{a+b}{2}$$

$$d = b - a$$

$$d = b - a$$

$$s = a + d/2$$

$$\boxed{a}\boxed{b} \longrightarrow \boxed{a}\boxed{d}$$

$$\longrightarrow \boxed{s}\boxed{d}$$

$$even_{j-1} = \{s_{j,2l} \mid 0 \le l \le 2^{j-1} - 1\}$$

$$odd_{j-1} = \{s_{j,2l+1} \mid 0 \le l \le 2^{j-1} - 1\}$$

$$d_{j-1,l} = s_{j,2l+1} - s_{j,2l}$$

$$s_{j-1,l} = s_{j,2l} + d_{j-1,l}/2$$

正向小波变换

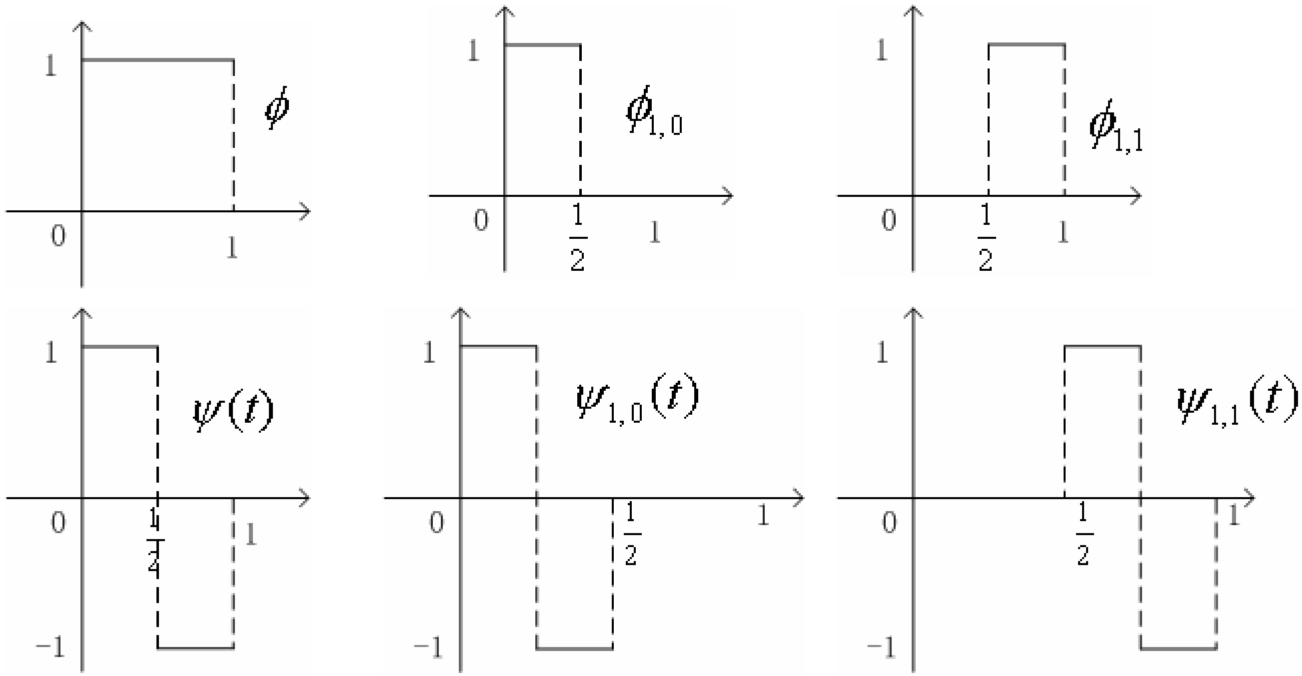
$$s_{j,2l} = s_{j-1,l} - d_{j-1,l}/2$$

$$s_{j,2l+1} = d_{j-1,l} + s_{j,2l}$$

$$s^j = Merge(even_{j-1}, odd_{j-1})$$

逆小波变换

2. **Haar**尺度函数、小波函数、多分辨分析



$$\phi(t)=\phi_{1,0}(t)+\phi_{1,1}(t) \qquad \psi(t)=\phi_{1,0}(t)-\phi_{1,1}(t)$$

- 标准化尺度和小波下的情况如何？

2. **Haar**尺度函数、小波函数、多分辨分析（续）

- 多分辨分析

$$V_0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset V_{n+1} \subset \cdots$$

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$$

尺度空间　　小波空间

- 函数的多分辨表示

$$\begin{aligned} f(t) &= 4\phi_{2,0}(t) - 2\phi_{2,1}(t) + \phi_{2,2}(t) + 3\phi_{2,3}(t) \\ &= \sqrt{2}\phi_{1,0}(t) + 2\sqrt{2}\phi_{1,1}(t) + 3\sqrt{2}\psi_{1,0}(t) - \sqrt{2}\psi_{1,1}(t) \\ &= 3\phi_{0,0}(t) - \psi_{0,0}(t) + 3\sqrt{2}\psi_{1,0}(t) - \sqrt{2}\psi_{1,1}(t) \end{aligned}$$

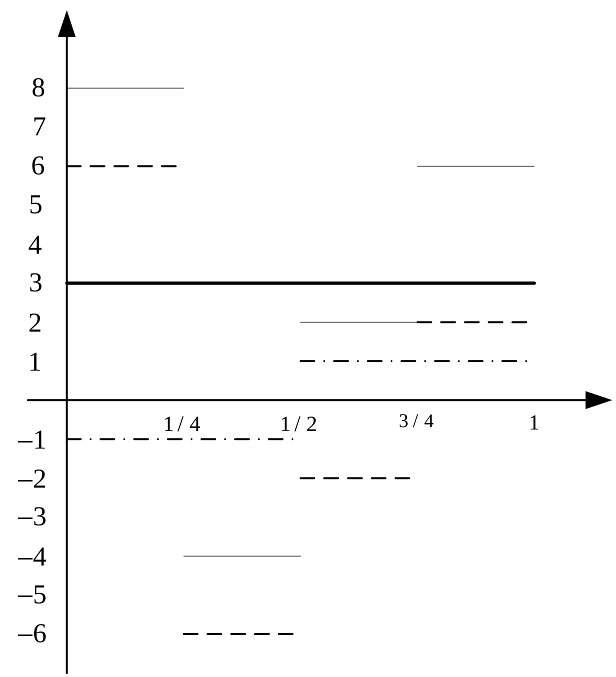
（标准化尺度函数与小波）

- 几个概念之间的联系
- 多分辨逼近

$$3\phi_{0,0}(t) \qquad \sqrt{2}\phi_{1,0}(t) + 2\sqrt{2}\phi_{1,1}(t) \qquad f(t)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$V_0 \qquad\qquad V_1 \qquad\qquad V_2$$



第2章预备知识

函数的Fourier变换

$$f(t) \in L^1(R) \Leftrightarrow \int_R |f(t)| dt < +\infty$$

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt = \left\langle f(t), e^{i\omega t} \right\rangle$$

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \hat{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad \text{条件?}$$

$$\left\langle f, g \right\rangle = \frac{1}{2\pi} \left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle$$

两个重要的完备的内积空间

- 线性空间**:** 集合**+**线性运算（加法与数乘）
- 内积空间**:** 线性空间 **+** 内积运算
- 完备的内积空间**:** 内积空间**+** 对**limit**运算封闭

n维欧氏空间

能量有限空间$L^2(R)$

Hilbert Space – Complete inner product space
完备的内积空间

Completeness (完备性): close for limit operation.

- **Natural** number (自然数) - close for addition "+" operation, not close for subtraction "-".
- **Integer** (整数) - close for addition, subtraction and multiplication "+", "-", "×", not close for division "÷".
- **Rational** number (有理数) – close for "+", "-", "×", "÷", not close for limit operation.

Example: $\pi = 3.14159265359323546 26\cdots$ is an irrational number (无理数)

Consider a sequence of rational numbers (有理数数列):

$$\{a_n\},\ a_1 = 3,\ a_2 = 3.1,\ a_3 = 3.14, \cdots \quad \text{are rational numbers.}$$

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pi \quad \text{is not a rational number.}$$

- **Real** number (实数) – close for "+", "-", "×", "÷" and limit operations. Therefore, R^n is Hilbert space.

■ Space L^2

***L^2* ([*a*, *b*]) is Hilbert space as well as Bannach space**

Definition : For an interval $a \leq t \leq b$, the **space *L^2* ([*a*, *b*])** is the set of all square integrable functions defined on $a \leq t \leq b$. In other words,

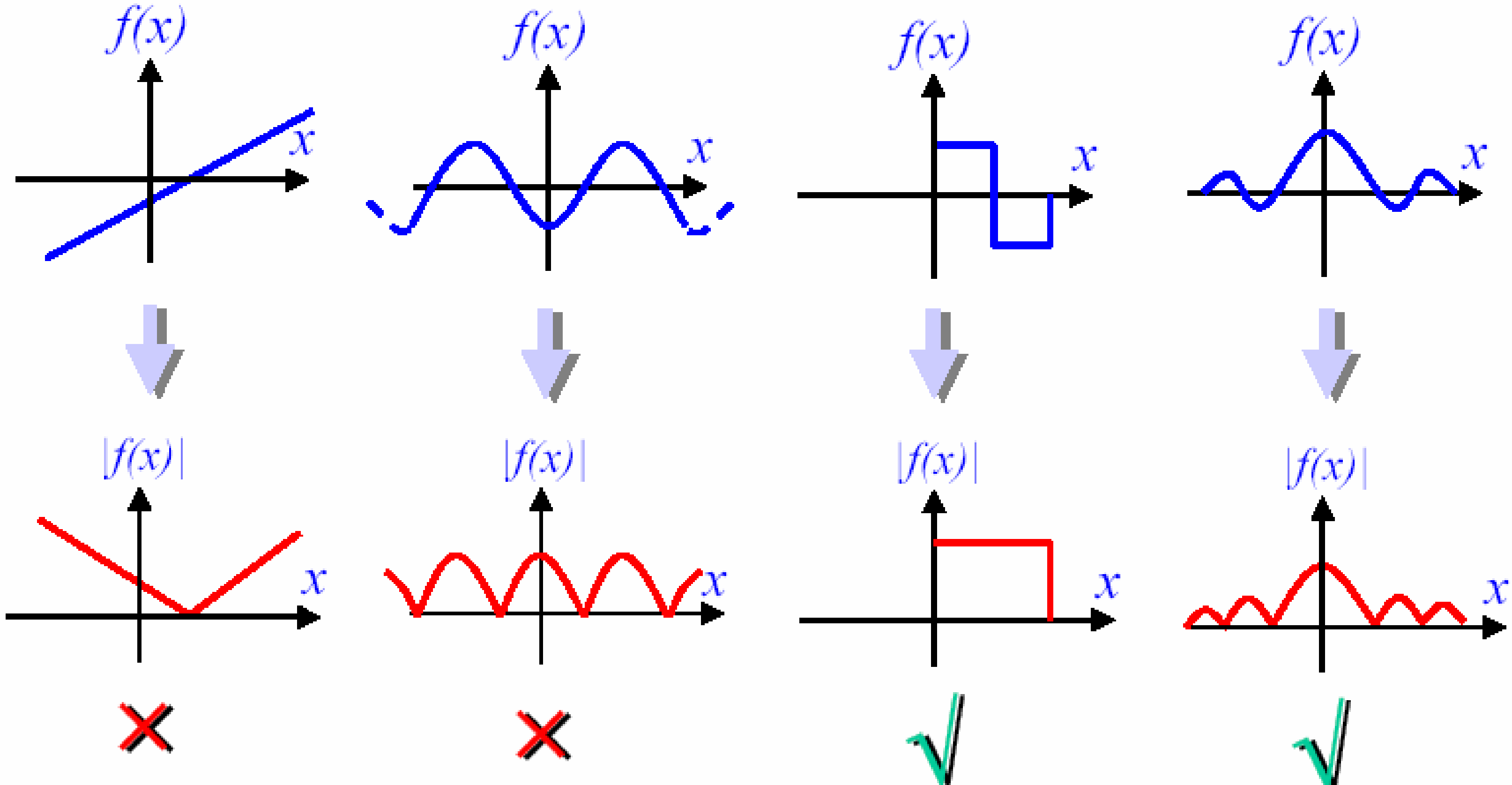
$$L^2([a,b]) = \{f : [a,b] \to C; \ \int_a^b | f(t) |^2 \, dt < \infty\}$$

The condition $\int_a^b | f(t) |^2 \, dt < \infty$

physically means that the total energy of the signal is finite (which is a reasonable class of signals to consider).

$\boxed{f(x) \in L^2(R)}$ $\Longleftrightarrow$ $\int_{-\infty}^{\infty} | f(x) |^2 \, dt < \infty$

$f(x)$ is square interable



- 小波分析重点研究能量有限空间$L^2(R)$

  平方可积空间及其函数的有效表示形式

- 寻找一个小波,使得它的二进伸缩和平移构成能量有限空间的一个标准正交基

$$\int_R \psi(t)dt = 0$$ 即 $\psi(t)$ 是一个小波 。

$$\left\{\psi_{j,k} = 2^{j/2}\psi\left(2^j t - k\right)\right\}_{j,k\in Z}$$ 构成 $L^2(R)$ 的标准正交基.

$$f(t) = \sum_j \sum_k c_{j,k}\psi_{j,k}(t) \qquad \sum_k \sum_j \left|c_{j,k}\right|^2 < \infty$$

- 给出快速计算小波系数 $c_{j,k} = \left\langle f, \psi_{j,k} \right\rangle$ 的算法

- 在实际中应用

Matlab若干常用函数

- Dyaddown 二元下抽样
- Dyadup 二元上抽样
- Waveinfo： 获得工具箱中的小波函数的主要性质
- Wfilters 获取小波滤波器
- Wavefun 小波函数和尺度函数做图
- Wavemngr 用于添加，删除，存储，列举小波

Dyaddown

- 功能：二值下采样
- 格式： (1) Y = dyaddown(X, EVENODD)

  (2) Y = dyaddown(X)

  (3) Y = dyaddown(X,EVENODD,'type')

  (4) Y = dyaddown(X,'type',EVENODD)
- 举例： Y = dyaddown(X, EVENODD)根据EVENODD的奇偶性对一数值序列进行采样; EVENODD为奇数,则采样奇数位置的值EVENODD为偶数,则采样偶数位置的值,此时等价于(2) .

  注意： Matlab中的奇偶与教材P19页表示方法的差异之处。

Dyadup

- 功能：二值上采样
- 格式：(1)Y = dyadup(X,EVENODD)

  (2)Y = dyadup(X)

  (3)Y = dyadup(X,EVENODD,'type')

  (4)Y = dyadup(X,'type',EVENODD)
- 举例： Y = dyadup(X,EVENODD) EVENODD为偶，则为用0对X序列进行偶数位置插值，使得插值后原序列在相应的奇数位置，反之亦然

  注意：Matlab中的奇偶与教材P19页表示方法的差异之处。

Waveinfo：

功能：获得工具箱中的小波函数的主要性质

格式：**waveinfo(‘wname')**

举例：（源代码）

wname=’haar’; %wname取db1小波

waveinfo(wname);

或者**waveinfo(‘haar’)**

Wfilters：

功能：小波滤波器

格式：**1 [Lo_D,Hi_D,Lo_R,Hi_R]=wfilters(‘wname’)**

2 [F1,F2]=wfilters(‘wname’,’type’)

其中 **‘type’** 可以取 **‘d’,’r’,’l’,’h’**

举例：（源代码）

```
wname=’db1’; %wname取db1小波
%下面计算与给定小波相关联的四个滤波器
[Lo_D,Hi_D,Lo_R,Hi_R]=wfilters(wname);
subplot(421);stem(Lo_D);title(‘分解低通滤波器’);grid;
subplot(422);stem(Hi_D);title(‘分解高通滤波器’);grid;
subplot(425);stem(Lo_R);title(‘重构低通滤波器’);grid;
subplot(426);stem(Hi_R);title(‘重构高通滤波器’);grid;
```

Wavemngr 用于添加，删除，存储，列举小波

```
wavemngr('read')
```

联系方式:

姓名:
系别:
联系电话: 包括手机/宿舍电话
Email地址:
导师姓名:
研究方向:

希望和建议**(**讨论**):**围绕选学该课程的目的谈一些你的想法，以便教学参考。

课后作业

- 第一章习题任选2题

  按要求在规定的时间内提交网络学堂。