

第7章 二进小波变换

- 连续二进小波变换
- 二进小波的构造及一些常用的二进小波
- 离散二进小波变换的快速算法
- 二维二进小波变换及其快速算法

二进小波及二进小波变换

在连续小波变换中，令参数 $a = 2^j$, $j \in Z$ ，而参数 b 仍取连续值。

则有二进小波：

$$\psi_{2^j, b}(t) = 2^{-j/2} \psi \left[2^{-j}(t-b) \right]$$

这时， $f(t) \in L^2(R)$ 的二进小波变换定义为：

$$WT_f(2^j, b) = 2^{-j/2} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \psi^* \left[2^{-j}(t-b) \right] dt$$

重构问题： $\psi(t)$ 在满足什么条件下，可以由二进小波变换

$\{WT_f(2^j, b) \mid j \in Z, b \in R\}$ 重构原信号？

卷积定义:

假定小波函数 ψ 为实函数, 尺度符号改用 s 表示, 相应于 (s, u) 的连续小波变换记为 $Wf(s, u)$. 当 $s = 2^j, j \in \mathbb{Z}$ 时, 连续二进小波变换为:

$$Wf(2^j, u) = 2^{j/2} (f * \bar{\psi}_{2^j})(u)$$

其中, $\bar{\psi}_{2^j}(u) = \psi_{2^j}(-u) = \frac{1}{2^j} \psi\left(-\frac{u}{2^j}\right)$

重构问题: $\psi(t)$ 在满足什么条件下, 可以由二进小波变换

$$\{Wf(2^j, u) \mid j \in \mathbb{Z}, u \in \mathbb{R}\} \text{ 重构原信号?}$$

注意与当前文献中各种定义的区别.

$Wf(s, u) = f * \psi_s(u)$		$Wf(s, u) = f * \bar{\psi}_s(u)$
$\psi_s(u) = \frac{1}{s} \psi\left(\frac{u}{s}\right)$		$\bar{\psi}_s(u) = \frac{1}{\sqrt{s}} \psi\left(\frac{-u}{s}\right)$

设函数 $\psi(t) \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ ，如果存在正常数 A 与 B ，且 $0 < A \leq B < \infty$ ，使得

$$\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\}, A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \hat{\psi}(2^j \omega) \right|^2 \leq B$$

则

$$A \|f\|_2^2 \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{2^j} \|Wf(2^j, u)\|_2^2 \leq B \|f\|_2^2$$

且存在 $\tilde{\psi}$ 满足

$$\forall \omega \in \mathbb{R} - \{0\}, \sum_{j \in \mathbb{Z}} \hat{\psi}^*(2^j \omega) \hat{\tilde{\psi}}(2^j \omega) = 1$$

使得原信号可由二进小波变换得到重构：

$$f(t) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \frac{1}{\sqrt{2^j}} (Wf(2^j, \cdot) * \tilde{\psi}_{2^j})(t) \quad \tilde{\psi}_{2^j}(t) = \frac{1}{2^j} \tilde{\psi}\left(\frac{t}{2^j}\right)$$

二进小波及其稳定性条件

二进小波变换的稳定性条件

二进小波及其重构小波

二进小波变换具有平移不变性

二进小波是允许小波

离散小波是二进小波

$$S_{basic} \supset S_{admissible} \supset S_{dyadic} \supset S_{discrete}$$

二进小波的构造

1. 离散小波是二进小波,这时用于计算二进小波变换时快速计算算法是什么?
2. 希望能够构造出非离散小波的二进小波,并给出二进小波的快速算法
3. 通常希望所应用的二进小波满足一些附加条件,如是一个平滑函数的导数.这在信号边缘提取方面很有用.
4. 构造可用于快速计算的具有有限长的二进小波滤波器.

设 $h, g, \tilde{h}, \tilde{g}$ 都是有限滤波器, $\hat{h}(\omega), \hat{g}(\omega), \hat{\tilde{h}}(\omega), \hat{\tilde{g}}(\omega)$ 是其频域表示
 $\hat{h}(0) = \sqrt{2}, \hat{g}(0) = 0$; $\phi, \psi, \tilde{\phi}, \tilde{\psi}$ 都是能量有限的函数, 且满足

$$\hat{\phi}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{h}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \quad \hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \prod_{p=1}^{+\infty} \frac{\hat{\tilde{h}}(2^{-p}\omega)}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\tilde{h}}(\omega/2) \hat{\tilde{\phi}}(\omega/2) \quad \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\tilde{g}}(\omega/2) \hat{\tilde{\phi}}(\omega/2)$$

若 $\forall \omega \in [-\pi, \pi], \hat{\tilde{h}}(\omega) \hat{h}^*(\omega) + \hat{\tilde{g}}(\omega) \hat{g}^*(\omega) = 2$ (3-34)第一式

则 $\tilde{\psi}$ 是 ψ 的一个重构小波。

$$A \left(2 - |\hat{h}(\omega)|^2 \right) \leq |\hat{g}(\omega)|^2 \leq B \left(2 - |\hat{h}(\omega)|^2 \right) \Rightarrow \psi \text{ 为二进小波}$$

较简单的情况:

$$\phi = \tilde{\phi}$$

$$h = \tilde{h}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \\ \hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \\ \hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\tilde{g}}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \\ |\hat{h}(\omega)|^2 + \hat{g}(\omega) \hat{g}^*(\omega) = 2 \\ \hat{h}(0) = \sqrt{2}, \hat{g}(0) = 0 \end{array} \right. \quad \longrightarrow \quad |\hat{\phi}(\omega)|^2 = \sum_{j \geq 1} \hat{\psi}(2^j \omega) \hat{\tilde{\psi}}^*(2^j \omega)$$

最简单的情况:

$$\phi = \tilde{\phi}, \psi = \tilde{\psi} \quad h = \tilde{h}, g = \tilde{g}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \\ \hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) \\ |\hat{h}(\omega)|^2 + |\hat{g}(\omega)|^2 = 2 \\ \hat{h}(0) = \sqrt{2}, \hat{g}(0) = 0 \end{array} \right. \Rightarrow \sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 = 1 \Rightarrow \psi \text{ 是二进小波}$$

其他附加条件,如有
限滤波器及某一光
滑函数的导数等

推论: 从式(3-34)可知,正交小波一定是二进小波

讨论: 正交小波必满足 $\sum_{j=-\infty}^{+\infty} |\hat{\psi}(2^j \omega)|^2 = 1$ 反之,如何?

例7.2表明, 反之不成立!!

正交二进小波

非正交二进小波

二进对偶尺度函数与对
偶小波

一些常用的二进小波

例7.1 非正交的二次样条二进小波

令 $\hat{\phi}(\omega)$ 为二次盒样条函数的**Fourier**变换:
$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^3 e^{-i\omega/2}$$

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^3 e^{-i\frac{\omega}{2}}$$

取
$$\hat{g}(\omega) = 2i\sqrt{2} \sin \frac{\omega}{2} e^{-i\frac{\omega}{2}} \quad \hat{g}(\omega) = \frac{2 - |\hat{h}(\omega)|^2}{\hat{g}^*(\omega)} = i \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-i\frac{\omega}{2}} \sin \frac{\omega}{2} \sum_{n=0}^2 \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2n}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2) = \frac{i\omega}{2} \left(\frac{\sin(\omega/4)}{\omega/4} \right)^4 e^{-\frac{i\omega}{2}}$$

$$\psi(t) = \frac{d\theta(t)}{dt} \quad \theta(t) = \theta_3(2t-1) \quad \text{平滑函数}$$

$\psi(t)$ 是一个二进小波(验证!).

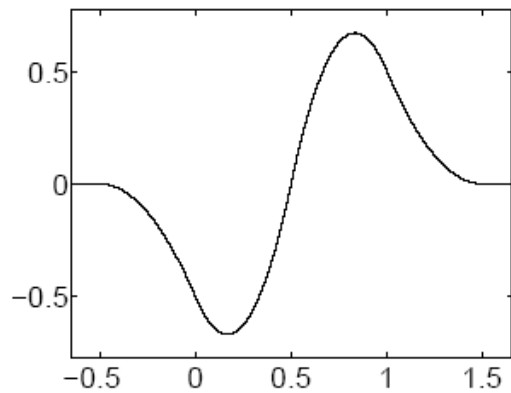
1. 系数计算方法

参阅参考文献,

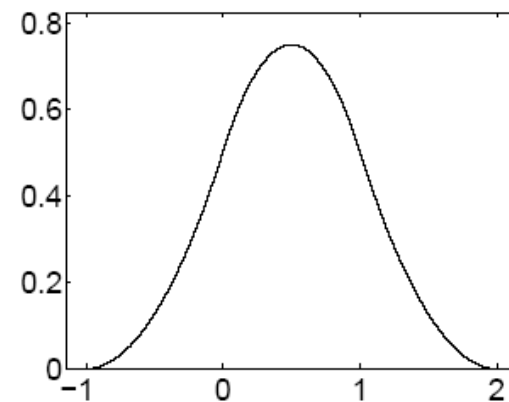
多尺度B样条小波边缘检测算子,中国科学(A辑),1995

$$h_n / \sqrt{2} \quad \tilde{h}_n / \sqrt{2} \quad g_n / \sqrt{2} \quad \tilde{g}_n / \sqrt{2}$$

2. 小波图形的特点



$-\psi(t)$



$\phi(t)$

与高斯小波的比较。

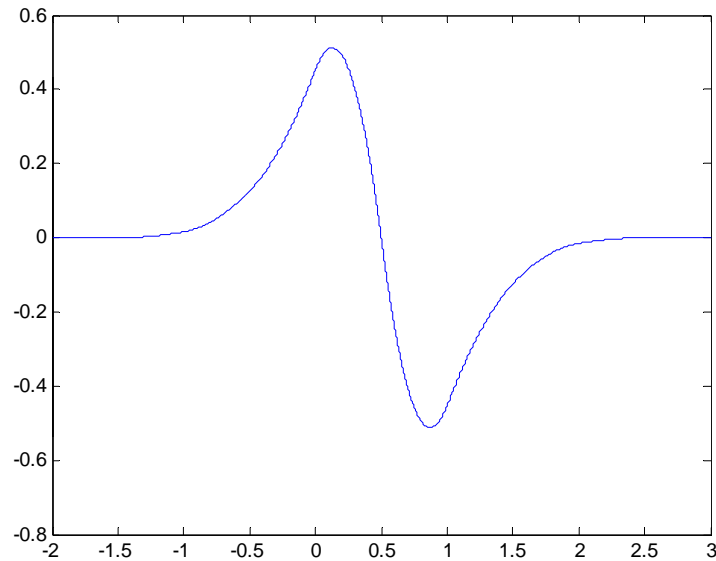


图7-1 非正交二次二进样条小波

3. 二进小波的做图方法

1) 用小波的解析表达式;

2) 用`upcoef`画图的合理性。实验发现,这种做图方法是正确的,但如何从理论上进行证明其有效性是需要解决的问题. 应该可以证明!!

例7.2 正交的二次样条二进小波

令 $\hat{\phi}(\omega)$ 为二次盒样条函数的Fourier变换:
$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^3 e^{-i\omega/2}$$

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \frac{\hat{\phi}(2\omega)}{\hat{\phi}(\omega)} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^3 e^{-i\frac{\omega}{2}}$$

$$|\hat{g}(\omega)|^2 = 2 \left(-\frac{1}{64} e^{i3\omega} - \frac{6}{64} e^{i2\omega} - \frac{15}{64} e^{i\omega} + \frac{44}{64} - \frac{15}{64} e^{-i\omega} - \frac{6}{64} e^{-i2\omega} - \frac{1}{64} e^{-i3\omega} \right)$$

$$\hat{g}(\omega) = \sum_{n=-2}^3 g_n e^{-in\omega} \quad |\hat{g}(\omega)|^2 = \hat{g}(\omega) \hat{g}^*(\omega)$$

由教材参考文献[5]中第28页, **h**与**g**的数值如下:

$$h_n = h_{1-n}, g_n = -g_{1-n} \quad \text{其中, 当 } n > 3 \text{ 时 } h_n = g_n = 0$$

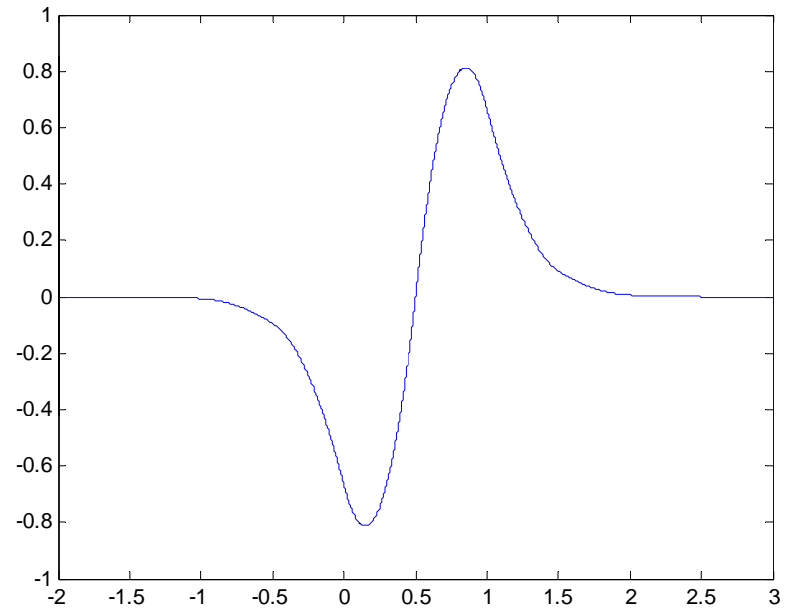
$$h_1 / \sqrt{2} = 0.3750, h_2 / \sqrt{2} = 0.1250, h_3 / \sqrt{2} = 0.0000$$

$$g_1 / \sqrt{2} = 0.5798, g_2 / \sqrt{2} = 0.0869, g_3 / \sqrt{2} = 0.0061$$

讨论: g_n 是如何求出的?

该结论由教材参考文献[5]中第28页给出.没有具体的推导过程.该滤波器在许多论文中被用于信号的边缘检测.

但经过验证,该结论是不正确的!!



一般问题: 如何通过下式求解 $g(z)$?

$$\begin{aligned} g(z)g(z^{-1}) &= 2 - h(z)h(z^{-1}) \\ &= a_0 + \sum_{i=1}^N a_i (z^i + z^{-i}) \end{aligned}$$

正交的二次二进样条小波

例7.2 正交的三次样条二进小波

令 $\hat{\phi}(\omega)$ 为三次盒样条函数的Fourier变换: $\hat{\phi}(\omega) = \left(\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^4$

类似地,可以求出 \mathbf{h} 和 \mathbf{g} : $h_n = h_{-n}, g_n = -g_{-n}; h_n = g_n = 0 \quad n > 4$

$$h_0/\sqrt{2} = 0.3750, h_1/\sqrt{2} = 0.2500, h_2/\sqrt{2} = 0.0625, h_3 = h_4 = 0$$

$$g_0 = 0, g_1/\sqrt{2} = 0.59261, g_2/\sqrt{2} = 0.10872, g_3/\sqrt{2} = 0.01643, g_4/\sqrt{2} = 0.00008$$

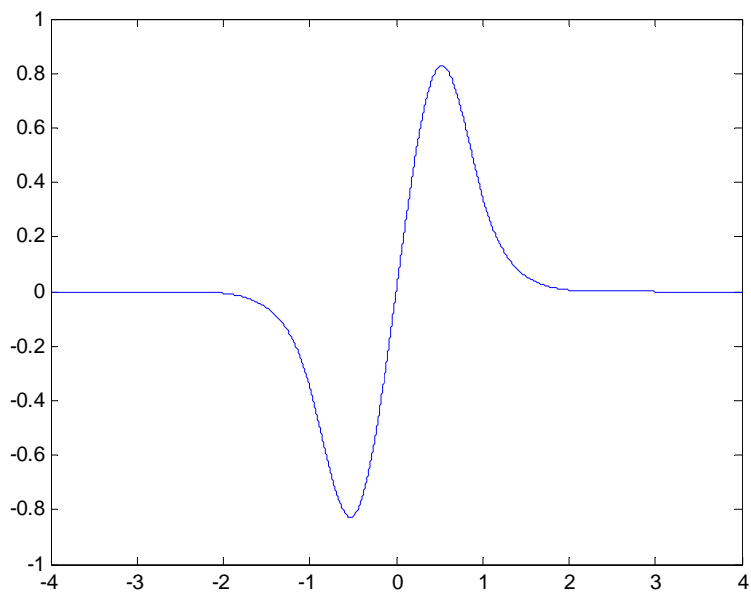
另一个解[杨福生著,P151]: $h_n = h_{-n}, g_n = -g_{1-n}$

$$h_0/\sqrt{2} = 0.3750, h_1/\sqrt{2} = 0.2500, h_2/\sqrt{2} = 0.0625, h_3 = h_4 = 0$$

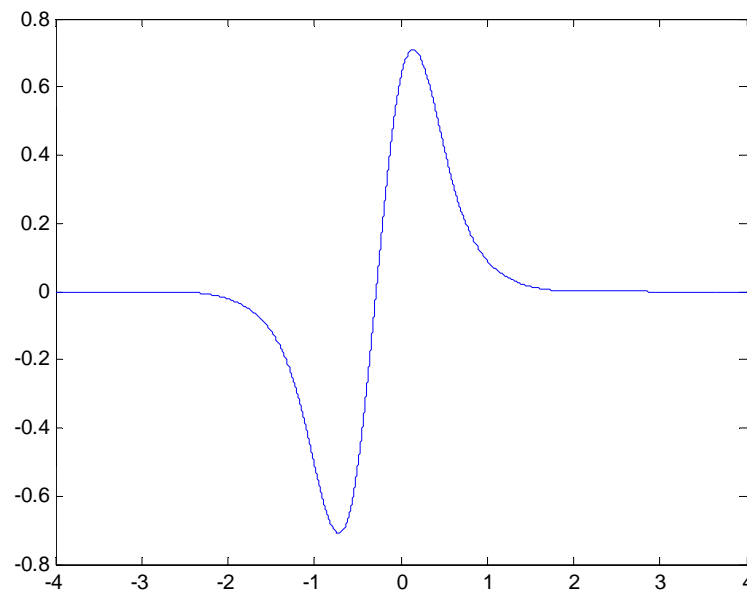
$$g_1/\sqrt{2} = 0.59261, g_2/\sqrt{2} = 0.10872, g_3/\sqrt{2} = 0.01643, g_4/\sqrt{2} = 0.00008$$

问题: 是否都正确?这同样涉及到上面提到的一般求解问题.

能否给出正交的任意 m 次样条二进小波的求解公式?



正交的三次二进样条小波
(利用对称的数据)



正交的三次二进样条小波
(利用**1/2**对称的数据)

相同?

正交的任何 m 次样条二进小波的求解

- 孙延奎，丁辰

摘要：研究一类样条二进小波滤波器的构造方法与性质。给出这类二进小波滤波器的一般构造方法，证明了这种二进小波的低通滤波器是对称的，高通滤波器不具有对称性。最后，给出二次与三次样条二进小波滤波器的构造实例，纠正了当前文献中的有关差错。

(在审中)

正交的任意m 次样条二进小波的求解

- 正交二次样条小波滤波器

$$h_0/\sqrt{2} = h_1/\sqrt{2} = 0.3750, h_{-1}/\sqrt{2} = h_2/\sqrt{2} = 0.1250$$

$$g = \{g_{-1}, g_0, g_1, g_2\}$$

$$g = \{0.0335, 0.2253, 0.6736, -0.9324\}$$

修正过!!

- 正交三次样条小波滤波器

$$h_0/\sqrt{2} = 0.3750, h_{-1}/\sqrt{2} = h_1/\sqrt{2} = 0.2500, h_{-2}/\sqrt{2} = h_2/\sqrt{2} = 0.0625$$

$$g = \{g_{-2}, g_{-1}, g_0, g_1, g_2\} = \{-0.04628, -0.13844, -0.82967, 0.84555, 0.16884\}$$

例7.3 零对称和反对称二进样条小波的构造

m 阶中心B样条的定义。记

$$\tilde{N}_1(t) = \begin{cases} 1 & -\frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad \left| \begin{array}{l} \tilde{N}_m(t) = \tilde{N}_{m-1}(t) * \tilde{N}_1(t), m \geq 2 \\ \text{称 } \tilde{N}_m(t) \text{ 为 } m \text{ 阶中心B样条。} \end{array} \right. \quad \hat{N}_m(\omega) = \left[\frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right]^m$$

$m+1$ 阶中心B样条 $\tilde{N}_{m+1}(t)$ 与 m 次盒样条 $\theta_m(t)$ 的区别与联系:

当 m 为奇数时, $\theta_m(t) = \tilde{N}_{m+1}(t)$

当 m 为偶数时, $\theta_m(t)$ 由 $\tilde{N}_{m+1}(t)$ 向右平移 $1/2$ 得到。

以下分偶数阶和奇数阶中心B样条介绍零对称和反对称二进小波的构造方法。

例7.3 零对称和反对称二进样条小波的构造(续)

- 以偶数阶中心B样条为基础的二进样条小波

$$\phi(t) = \tilde{N}_{2m}(t) \quad \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2m} = \sqrt{2} \left(\frac{2 + e^{i\omega} + e^{-i\omega}}{4} \right)^m$$

$$\hat{\phi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\phi}(\omega/2) \quad \sum_{k=1}^N |a_k| < 1 \quad (a_1, a_2, \dots, a_N) \quad \mathbf{n} \text{维实数组}$$

$$\begin{cases} \hat{g}(\omega) = \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \right) \sqrt{2 - |\hat{h}(\omega)|^2} \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \right)^{-1} \sqrt{2 - |\hat{h}(\omega)|^2} \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\tilde{g}}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

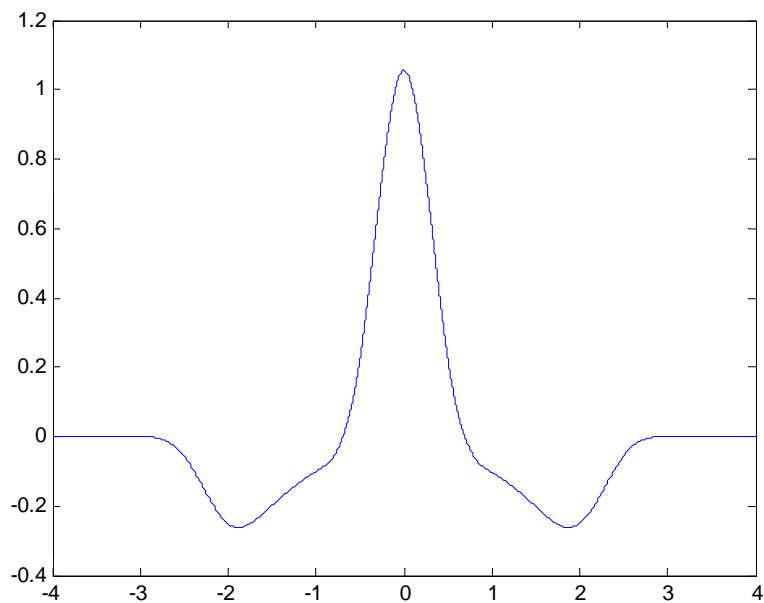
零对称的二进样条小波

$$\begin{cases} \hat{g}(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \right) \sqrt{2 - |\hat{h}(\omega)|^2} \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega \right)^{-1} \sqrt{2 - |\hat{h}(\omega)|^2} \end{cases}$$

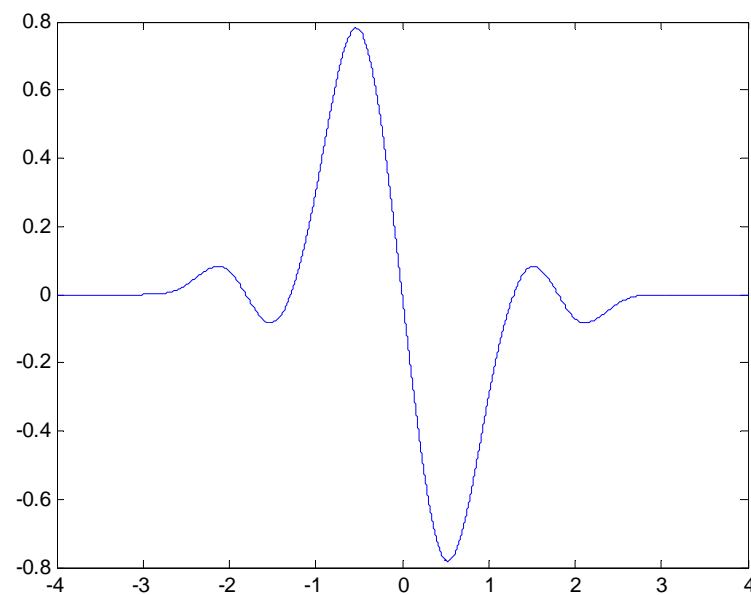
$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\tilde{g}}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

零反对称的二进样条小波



由 $\phi(t) = \tilde{N}_4(t)$ 构造的零对称二进样条小波



零反对称二进样条小波

例7.3 零对称和反对称二进样条小波的构造(续)

- 以奇数阶中心B样条为基础的二进样条小波

$$\tilde{N}_{2m+1}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \tilde{N}_{2m+1}(\omega) \quad \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^{2m+1} \quad \hat{h}(\omega) \text{ 非 } 2\pi \text{ 周期}$$

解决方法: $\phi(t) = \frac{1}{2} \tilde{N}_{2m+1}\left(\frac{t}{2}\right), \hat{\phi}(2\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{h}(\omega) \hat{\phi}(\omega), \hat{h}(\omega) = \sqrt{2} (\cos \omega)^{2m+1}$

$$\begin{cases} \hat{g}(\omega) = \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega\right) \sqrt{2 - |\hat{h}(\omega)|^2} \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega\right)^{-1} \sqrt{2 - |\hat{h}(\omega)|^2} \end{cases}$$

$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\tilde{g}}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

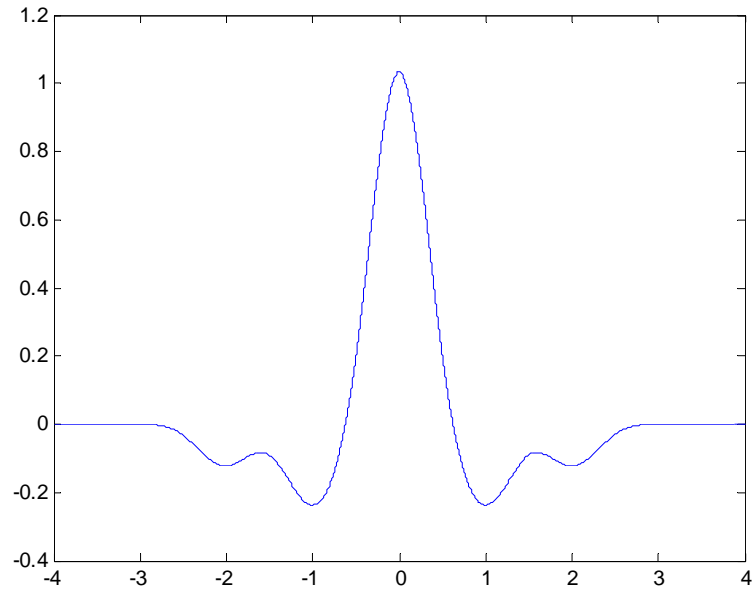
零对称的二进样条小波

$$\begin{cases} \hat{g}(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega\right) \sqrt{2 - |\hat{h}(\omega)|^2} \\ \hat{\tilde{g}}(\omega) = i \operatorname{sgn}(\omega) \left(1 + \sum_{k=1}^N a_k \cos k\omega\right)^{-1} \sqrt{2 - |\hat{h}(\omega)|^2} \end{cases}$$

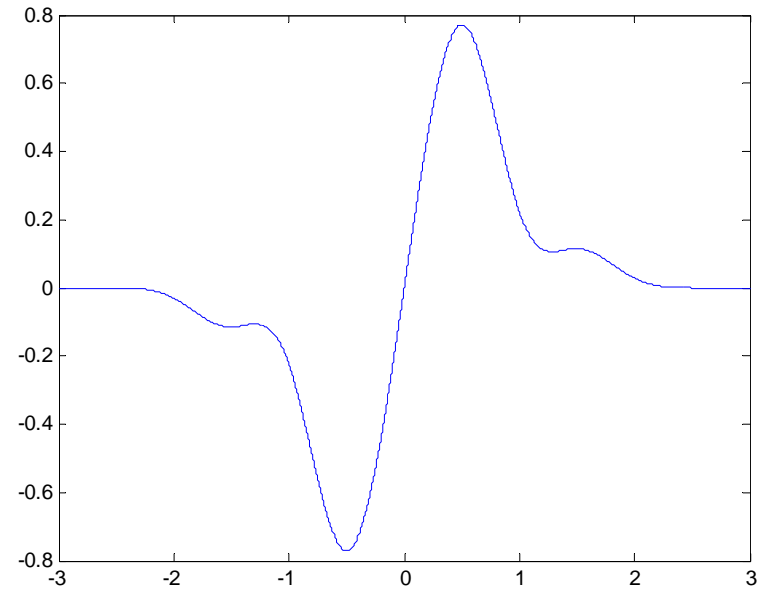
$$\hat{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{g}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

$$\hat{\tilde{\psi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{\tilde{g}}(\omega/2) \hat{\phi}(\omega/2)$$

零反对称的二进样条小波



由 $\phi(t) = 1/2\tilde{N}_3(t/2)$ 构造的零对称二进样条小波



零反对称二进样条小波

一些常用的二进小波

Marr小波作为二进小波

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(1-t^2)e^{-t^2/2} \quad \text{[注意: 与教材上相差一个系数]}$$

利用滤波器进行计算时的滤波器系数如下（作为二进小波） [杨福生著,P148]:

n	$h_n / \sqrt{2}$	$g_n / \sqrt{2}$
0	0.4317	0.7118
1	0.2864	-0.2309
2	0.0450	-0.1120
3	-0.0393	-0.0226
4	-0.0132	0.0062
5	0.0032	0.0039

问题: 这些滤波器系数是如何计算得到的?

更正: 应该是关于零对称的系数?

离散二进小波变换的快速算法

介绍如何利用二进小波变换处理离散信号的输入序列，以及如何采用滤波器组进行快速计算。

$$\dot{f}(t) \quad [0,1] \quad 2^{-J}, J > 0$$

小波变换的尺度为:

$$\frac{1}{2^J}, \frac{1}{2^{J-1}}, \dots, 1$$

由于 $\mathbf{s}=2^j$, 因此,相应的分辨率j为: $-J, -J+1, \dots, -1, 0$

为表述方便,令 $f(t) = \dot{f}(N^{-1}t) \quad N = 2^J$

$$f(t) \quad [0, N] \quad 1$$

小波变换的尺度为:

$$2^0, 2^1, \dots, 2^J$$

由于 $\mathbf{s}=2^j$, 因此,相应的分辨率j为: $0, 1, \dots, J$

$$W\dot{f}(2^j, u) = N^{-1/2} Wf(N2^j, Nu)$$

如何理解采样间距为1的离散信号是一个被平滑的连续函数的均匀采样？

$$\phi, \psi, \tilde{\phi}, \tilde{\psi} \quad h, g, \tilde{h}, \tilde{g}$$

设 $a^0 = \{a_n^0\}_{n \in \mathbb{Z}}$ 是采样间距为1的离散信号，则存在 $f(t) \in L^2(\mathbb{R})$

使得【参考文献5中定理2.6】

$$a_n^0 = (f * \phi)(n), \forall n \in \mathbb{Z}$$

离散二进小波变换的定义:

对任意 $j \geq 0$, 记 $a_n^j = 2^{j/2} (f * \bar{\phi}_{2^j})(n) \quad n \in \mathbb{Z}$

对 $j > 0$, 在整数格点上, 二进小波系数由下式给出:

$$d_n^j = Wf(2^j, n) = 2^{j/2} (f * \bar{\psi}_{2^j})(n) \quad n \in \mathbb{Z}$$

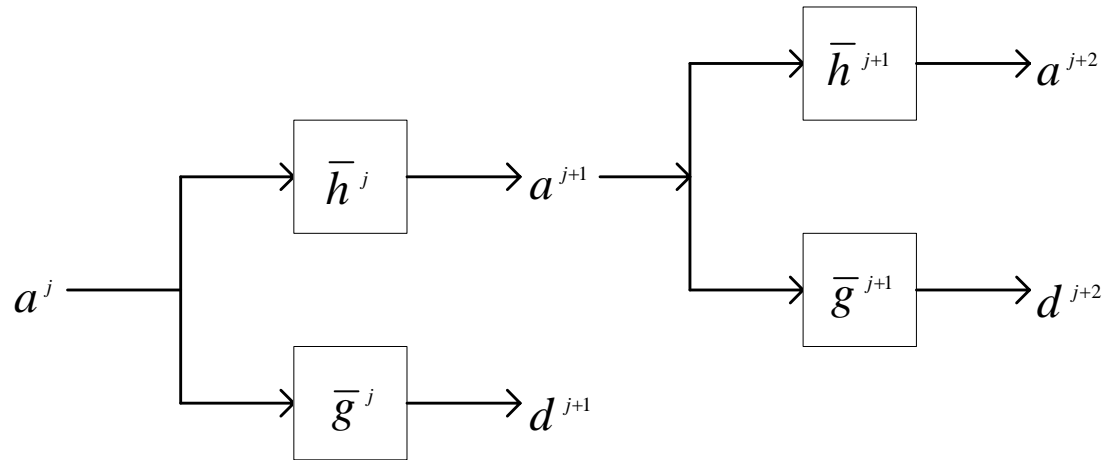
则对任意尺度 $2^J > 1$, 离散信号序列 $\{d^1, d^2, \dots, d^J, a^J\}$ 称为 a^0 的离散二进小波变换。

快速算法的基本求解思想:

将离散的问题转化为连续的问题处理, 然后给出离散的处理结果.

$$h_k^j = \begin{cases} h_l & k = l2^j \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \quad (a^j * \bar{h}^j)_n = \sum_k \bar{h}_k^j a_{n-k}^j = \sum_{l \in \mathbb{Z}} \bar{h}_l a_{n-2^j l}^j \quad (k = 2^j l)$$

$$a^{j+1} = a^j * \bar{h}^j, \quad d^{j+1} = a^j * \bar{g}^j,$$



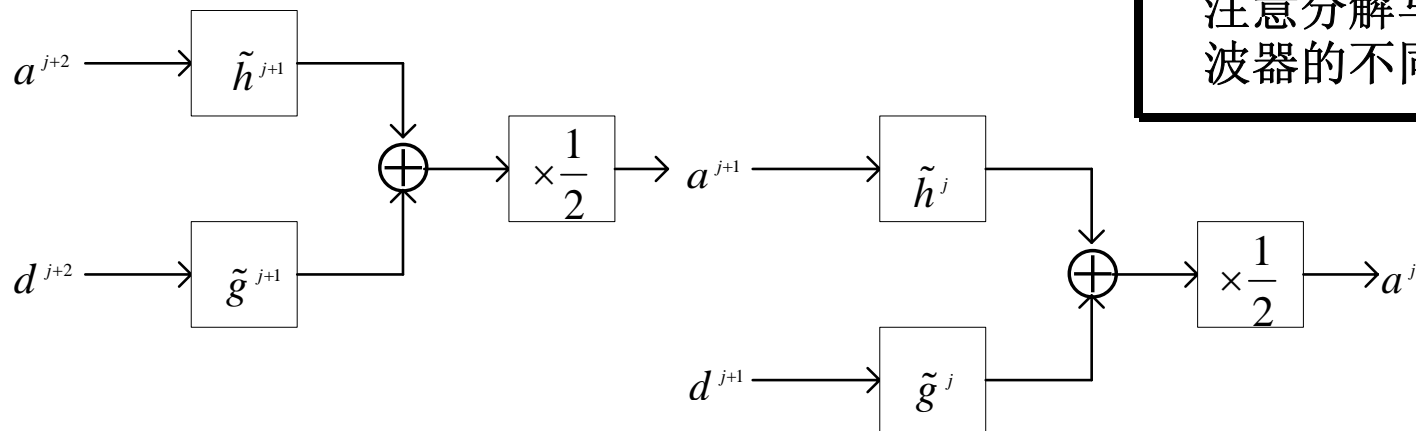
讨论:

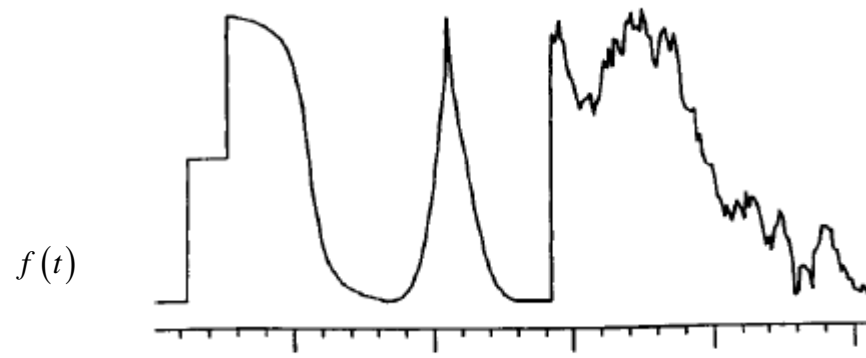
在Matlab中,二进小波变换没有对应的实现函数,需要自己编写.

与第4章中的相应算法相比,推导过程不同.

注意分解与重构滤波器的不同符号.

$$a^j = \frac{1}{2} (a^{j+1} * \tilde{h}^j + d^{j+1} * \tilde{g}^j)$$

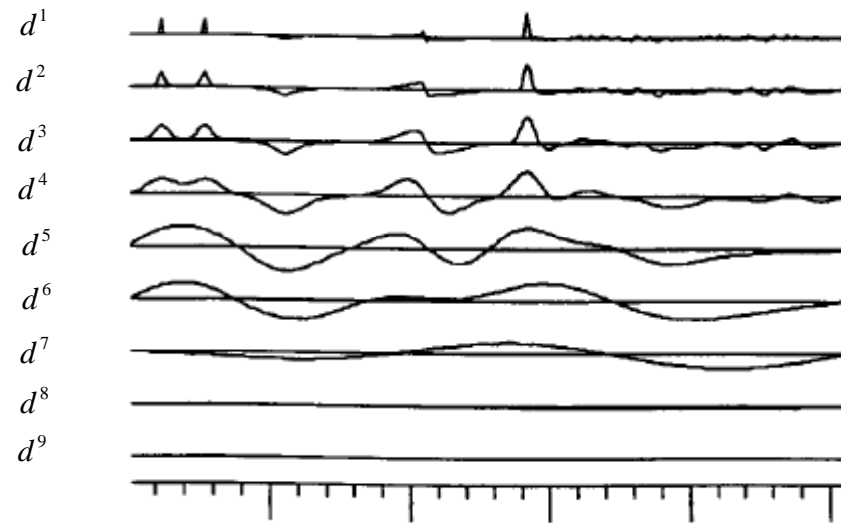




256个采样值

9次二进小波分解

a)



b)

二维二进小波变换的一般概念

主要介绍如何由一维二进小波，构造可分离的二维二进小波，并给出离散二进小波变换的快速算法。

通过两个小波 $\psi^1(x, y)$ 和 $\psi^2(x, y)$ 定义，这里假设这两个小波都是实函数。

$$\begin{cases} \psi_{2^j}^1(x, y) = \frac{1}{2^{2j}} \psi^1\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \\ \psi_{2^j}^2(x, y) = \frac{1}{2^{2j}} \psi^2\left(\frac{x}{2^j}, \frac{y}{2^j}\right) \end{cases}$$

则对任意的函数 $f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$ ， f 在尺度 2^j 和位置 (x, y) 的小波变换由两个分量来定义，即

$$\begin{cases} W^1 f(2^j, x, y) = \frac{1}{2^j} \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \psi^1\left(\frac{u-x}{2^j}, \frac{u-y}{2^j}\right) dudv = 2^j (f * \bar{\psi}_{2^j}^1)(x, y) \\ W^2 f(2^j, x, y) = \frac{1}{2^j} \iint_{\mathbb{R}^2} f(u, v) \psi^2\left(\frac{u-x}{2^j}, \frac{u-y}{2^j}\right) dudv = 2^j (f * \bar{\psi}_{2^j}^2)(x, y) \end{cases}$$

我们称函数集合 $Wf = \{W^1 f(2^j, x, y), W^2 f(2^j, x, y)\}_{j \in \mathbb{Z}}$ 为 $f(x, y)$ 的二维二进小波变换。

$$\begin{cases} \hat{W}^1 f(\omega_x, \omega_y) = 2^j \hat{f}(\omega_x, \omega_y) \hat{\psi}^{1*}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \\ \hat{W}^2 f(\omega_x, \omega_y) = 2^j \hat{f}(\omega_x, \omega_y) \hat{\psi}^{2*}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \end{cases}$$

若存在 $A > 0$ 和 $B > 0$, 使得

$$\forall \omega = (\omega_x, \omega_y) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\} \quad A \leq \sum_{j \in \mathbb{Z}} \left(\left| \hat{\psi}^1(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \right|^2 + \left| \hat{\psi}^2(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \right|^2 \right) \leq B$$

则存在重构小波 $\{\tilde{\psi}^1, \tilde{\psi}^2\}$, 其Fourier变换满足

$$\sum_{j=-\infty}^{+\infty} \left\{ \hat{\psi}^1(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \hat{\tilde{\psi}}^{1*}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) + \hat{\psi}^2(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \hat{\tilde{\psi}}^{2*}(2^j \omega_x, 2^j \omega_y) \right\} = 1$$

使得

$$f(x, y) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2^j} \left\{ (W^1 f(2^j, \bullet, \bullet) * \tilde{\psi}_{2^j}^1)(x, y) + (W^2 f(2^j, \bullet, \bullet) * \tilde{\psi}_{2^j}^2)(x, y) \right\}$$

称这两个小波 $\psi^1(x, y)$ 和 $\psi^2(x, y)$ 为二维二进小波.

二维可分离二进小波变换构造的一般框架

方法: 利用一维二进小波构造可分离的二维二进小波. 为简单起见, 仅考虑 $\phi = \tilde{\phi}$ 的情况.

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + \hat{g}(\omega)\hat{g}^*(\omega) = 2$$

$$\hat{\gamma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{q}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \hat{q}(\omega) \quad 2\pi \text{ 周期} \quad \begin{cases} \psi^1(x, y) = \psi(x)\gamma(y) \\ \psi^2(x, y) = \gamma(x)\psi(y) \end{cases}$$

$$\hat{\xi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{l}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \hat{l}(\omega) \quad 2\pi \text{ 周期} \quad \begin{cases} \tilde{\psi}^1(x, y) = \tilde{\psi}(x)\tilde{\xi}(y) \\ \tilde{\psi}^2(x, y) = \tilde{\xi}(x)\tilde{\psi}(y) \end{cases}$$

$$\hat{q}(\omega)\hat{l}^*(\omega) = \frac{2 + |\hat{h}(\omega)|^2}{2} \quad \longrightarrow \quad \tilde{\psi}^1(x, y) \text{ 和 } \tilde{\psi}^2(x, y) \text{ 是重构小波.}$$

问题: 如何验证 $\psi^1(x, y)$ 和 $\psi^2(x, y)$ 满足稳定性条件?

常用的二维可分离二进小波

例7.4 由非正交的二次样条二进小波，构造可分离的二维二进小波

$$\text{取 } \hat{q}(\omega) = 1, \text{ 则 } \gamma(t) = \sqrt{2}\phi(2t) \quad \hat{l}(\omega) = \frac{2 + |\hat{h}(\omega)|^2}{2}$$

$$l_3 = l_{-3} = \frac{1}{64}, l_2 = l_{-2} = \frac{3}{32}, l_1 = l_{-1} = \frac{15}{64}, l_0 = \frac{21}{16}$$

$$\text{当 } n > 3 \text{ 时, } l_n = l_{-n} = 0$$

二进小波

$$\begin{cases} \psi^1(x, y) = \sqrt{2}\psi(x)\phi(2y) \\ \psi^2(x, y) = \sqrt{2}\phi(2x)\psi(y) \end{cases}$$

重构小波

$$\begin{cases} \tilde{\psi}^1(x, y) = \tilde{\psi}(x)\tilde{\xi}(y) \\ \tilde{\psi}^2(x, y) = \tilde{\xi}(x)\tilde{\psi}(y) \end{cases}$$
$$\hat{\tilde{\xi}}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}}\hat{l}\left(\frac{\omega}{2}\right)\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

例7.5 由正交的二次样条二进小波，构造可分离的二维二进小波

$$\text{取 } \hat{q}(\omega) = \hat{l}(\omega), \text{ 则 } \gamma(t) = \tilde{\xi}(t) \quad \left| \hat{l}(\omega) \right|^2 = \frac{2 + \left| \hat{h}(\omega) \right|^2}{2}$$

$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^3 e^{-i\frac{\omega}{2}} \quad \Rightarrow \quad \left| \hat{l}(\omega) \right|^2 = 1 + \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^6$$

其中一组解如下：

$$l = \{l_{-1}, l_0, l_1, l_2\} = \{0.1932, 1.1262, 0.0139, 0.0809\}$$

修正过!!

二进小波/重构小波

$$\begin{cases} \psi^1(x, y) = \psi(x)\gamma(y) \\ \psi^2(x, y) = \gamma(x)\psi(y) \end{cases} \quad \hat{\gamma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{l}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

注意：教材参考文献【5】等没有给出滤波器 l 的求解方法。

由正交的三次样条二进小波，构造可分离的二维二进小波

$$\text{取 } \hat{q}(\omega) = \hat{l}(\omega), \text{ 则 } \gamma(t) = \tilde{\xi}(t) \quad |\hat{l}(\omega)|^2 = \frac{2 + |\hat{h}(\omega)|^2}{2}$$
$$\hat{h}(\omega) = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^4 \quad \Rightarrow \quad |\hat{l}(\omega)|^2 = 1 + \left(\cos \frac{\omega}{2} \right)^8$$

其中一组解如下：

$$l = \{l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2\} = \{1.1098, 0.1795, 0.0938, 0.0276, 0.0035\}$$

二进小波/重构小波

修正过!!

$$\begin{cases} \psi^1(x, y) = \psi(x)\gamma(y) \\ \psi^2(x, y) = \gamma(x)\psi(y) \end{cases} \quad \hat{\gamma}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \hat{l}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

例7.6 由零对称和反对称二进小波构造可分离的二维二进小波

$$\text{取 } \hat{q}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^M b_k \cos k\omega \right) \sqrt{2 + |\hat{h}(\omega)|^2} \quad \sum_{k=1}^M |b_k| < 1$$
$$\hat{l}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 + \sum_{k=1}^M b_k \cos k\omega \right)^{-1} \sqrt{2 + |\hat{h}(\omega)|^2} \quad (b_1, b_2, \dots, b_M) \text{ 实数组}$$

则利用**对称**二进小波 $\psi(t)$ 及其重构小波 $\tilde{\psi}(t)$ 所构造的 $\{\psi^1(x, y), \psi^2(x, y)\}$

是一个对称的二维二进小波。

相应地，利用**反对称**二进小波 $\psi(t)$ 及其重构小波 $\tilde{\psi}(t)$ 所构造的 $\{\psi^1(x, y), \psi^2(x, y)\}$ 是一个**反对称**的二维二进小波。

二维离散二进小波变换及其快速算法

介绍采样间距为1的规范化离散图像的二进小波变换:

设 $a^0 = \{a_{n,m}^0\}_{n,m \in \mathbb{Z}}$ 是采样间隔为1的二维离散信号, 则存在一个二维函数

$f(x, y) \in L^2(\mathbb{R}^2)$, 使得

$$(f * \varphi)(n, m) = a_{n,m}^0 \quad \varphi(x, y) = \phi(x)\phi(y)$$

对任意 $j \geq 0$, 记

$$a_{n,m}^j = 2^j (f * \bar{\varphi}_{2^j})(n, m)$$

对 $j > 0$, 在整数网格点 (n, m) 上, 二进小波系数由下式给出:

$$\begin{cases} d_{n,m}^{j,1} = W^1 f(2^j, n, m) = 2^j (f * \bar{\psi}_{2^j}^1)(n, m) \\ d_{n,m}^{j,2} = W^2 f(2^j, n, m) = 2^j (f * \bar{\psi}_{2^j}^2)(n, m) \end{cases}$$

则对任意尺度 $2^J > 1$, 离散信号序列 $\{d^{1,1}, d^{2,1}, \dots, d^{J,1}, d^{1,2}, d^{2,2}, \dots, d^{J,2}, a^J\}$

称为 a^0 的离散二维二进小波变换。

例7.4中二维二进小波变换的快速实现:

$$|\hat{h}(\omega)|^2 + \hat{g}(\omega)\hat{g}^*(\omega) = 2 \quad \hat{q}(\omega) = 1, \hat{l}(\omega) = \frac{2 + |\hat{h}(\omega)|^2}{2}$$

$$\hat{A}_{2^j}(\omega_x, \omega_y) = \hat{A}_{2^{j-1}}(\omega_x, \omega_y) \hat{h}^*(2^{j-1}\omega_x) \hat{h}^*(2^{j-1}\omega_y)$$

$$\hat{D}_{2^j}^1(\omega_x, \omega_y) = \hat{A}_{2^{j-1}}(\omega_x, \omega_y) \hat{g}^*(2^{j-1}\omega_x)$$

$$\hat{D}_{2^j}^2(\omega_x, \omega_y) = \hat{A}_{2^{j-1}}(\omega_x, \omega_y) \hat{g}^*(2^{j-1}\omega_y)$$

$$A_{2^j}(x, y) = \sum_{k,l} \bar{h}_k \bar{h}_l A_{2^{j-1}}(x - 2^{j-1}k, y - 2^{j-1}l) \quad A_{2^j}(n, m) = \sum_{k,l} \bar{h}_k \bar{h}_l A_{2^{j-1}}(n - 2^{j-1}k, m - 2^{j-1}l)$$

$$D_{2^j}^1(x, y) = \sum_k \bar{g}_k A_{2^{j-1}}(x - 2^{j-1}k, y) \quad D_{2^j}^1(n, m) = \sum_k \bar{g}_k A_{2^{j-1}}(n - 2^{j-1}k, m)$$

$$D_{2^j}^2(x, y) = \sum_l \bar{g}_l A_{2^{j-1}}(x, y - 2^{j-1}l) \quad D_{2^j}^2(n, m) = \sum_l \bar{g}_l A_{2^{j-1}}(n, m - 2^{j-1}l)$$

快速分解算法

$$a_{n,m}^{j+1} = \sum_{k,l} \bar{h}_k \bar{h}_l a_{n-2^j k, m-2^j l}^j$$

$$d_{n,m}^{j+1,1} = \sum_k \bar{g}_k a_{n-2^j k, m}^j$$

$$d_{n,m}^{j+1,2} = \sum_l \bar{g}_l a_{n, m-2^j l}^j$$

快速重构算法

$$\hat{A}_{2^j}(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4} \hat{D}_{2^{j+1}}^1(\omega_x, \omega_y) \hat{g}(2^j \omega_x) \hat{l}(2^j \omega_y) + \frac{1}{4} \hat{D}_{2^{j+1}}^2(\omega_x, \omega_y) \hat{l}(2^j \omega_x) \hat{g}(2^j \omega_y) \\ + \frac{1}{4} \hat{A}_{2^{j+1}}(\omega_x, \omega_y) \hat{h}(2^j \omega_x) \hat{h}(2^j \omega_y) \quad \text{修正过!!}$$

$$A_{2^j}(x, y) = \frac{1}{4} \left[\sum_{k,p} \tilde{g}_k l_p D_{2^{j+1}}^1(x - k2^j, y - p2^j) + \sum_{k,p} l_k \tilde{g}_p D_{2^{j+1}}^2(x - k2^j, y - p2^j) \right. \\ \left. + \sum_{k,p} h_k h_p A_{2^{j+1}}(x - k2^j, y - p2^j) \right]$$

$$A_{2^j}(n, m) = \frac{1}{4} \left[\sum_{k,p} \tilde{g}_k l_p D_{2^{j+1}}^1(n - k2^j, m - p2^j) + \sum_{k,p} l_k \tilde{g}_p D_{2^{j+1}}^2(n - k2^j, m - p2^j) \right. \\ \left. + \sum_{k,p} h_k h_p A_{2^{j+1}}(n - k2^j, m - p2^j) \right]$$

$$a_{n,m}^j = \frac{1}{4} \left[\sum_{k,p} \tilde{g}_k l_p d_{n-k2^j, m-p2^j}^{j+1,1} + \sum_{k,p} l_k \tilde{g}_p d_{n-k2^j, m-p2^j}^{j+1,2} + \sum_{k,p} h_k h_p a_{n-k2^j, m-p2^j}^{j+1} \right]$$

另一种表示方法

$$a * (h, g)_{n,m} = \sum_l g_l \left(\sum_k h_k a_{n-k,m-l} \right) = \sum_{k,l} h_k g_l a_{n-k,m-l}$$

$$\begin{cases} d^{j+1,1} = a^j * (\bar{g}^j, \delta) \\ d^{j+1,2} = a^j * (\delta, \bar{g}^j) \\ a^{j+1} = a^j * (\bar{h}^j, \bar{h}^j) \end{cases}$$

分解算法

$$a^j = \frac{1}{4} \left[d^{j+1,1} * (\tilde{g}^j, l^j) + d^{j+1,2} * (l^j, \tilde{g}^j) + a^{j+1} * (h^j, h^j) \right] \text{修正过!!}$$

重构算法

例7.5中二维二进小波变换的快速实现

$$\tilde{g} = g, \hat{q}(\omega) = \hat{l}(\omega) \quad \left| \hat{h}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{g}(\omega) \right|^2 = 2 \quad \left| \hat{l}(\omega) \right|^2 = \frac{2 + \left| \hat{h}(\omega) \right|^2}{2}$$

$$\hat{A}_{2^j}(\omega_x, \omega_y) = \hat{A}_{2^{j-1}}(\omega_x, \omega_y) \hat{h}^*(2^{j-1}\omega_x) \hat{h}^*(2^{j-1}\omega_y)$$

$$\hat{D}_{2^j}^1(\omega_x, \omega_y) = \hat{A}_{2^{j-1}}(\omega_x, \omega_y) \hat{g}^*(2^{j-1}\omega_x) \hat{l}^*(2^{j-1}\omega_y)$$

$$\hat{D}_{2^j}^2(\omega_x, \omega_y) = \hat{A}_{2^{j-1}}(\omega_x, \omega_y) \hat{l}^*(2^{j-1}\omega_x) \hat{g}^*(2^{j-1}\omega_y)$$

$$A_{2^j}(x, y) = \sum_{k,p} \bar{h}_k \bar{h}_p A_{2^{j-1}}(x - 2^{j-1}k, y - 2^{j-1}p)$$

$$D_{2^j}^1(x, y) = \sum_{k,p} \bar{g}_k \bar{l}_p A_{2^{j-1}}(x - 2^{j-1}k, y - 2^{j-1}p)$$

$$D_{2^j}^2(x, y) = \sum_{k,p} \bar{l}_k \bar{g}_p A_{2^{j-1}}(x - 2^{j-1}k, y - 2^{j-1}p)$$

$$A_{2^j}(n, m) = \sum_{k,p} \bar{h}_k \bar{h}_p A_{2^{j-1}}(n - 2^{j-1}k, m - 2^{j-1}p)$$

$$D_{2^j}^1(n, m) = \sum_{k,p} \bar{g}_k \bar{l}_p A_{2^{j-1}}(n - 2^{j-1}k, m - 2^{j-1}p)$$

$$D_{2^j}^2(n, m) = \sum_{k,p} \bar{l}_k \bar{g}_p A_{2^{j-1}}(n - 2^{j-1}k, m - 2^{j-1}p)$$

$$\begin{aligned}
 a_{n,m}^{j+1} &= \sum_{k,p} \bar{h}_k \bar{h}_p a_{n-2^j k, m-2^j p}^j \\
 d_{n,m}^{j+1,1} &= \sum_{k,p} \bar{g}_k \bar{l}_p a_{n-2^j k, m-2^{j-1} p}^j \\
 d_{n,m}^{j+1,2} &= \sum_{k,p} \bar{l}_k \bar{g}_p a_{n-2^{j-1} k, m-2^j p}^j
 \end{aligned}
 \left\{ \begin{aligned}
 d^{j+1,1} &= a^j * (\bar{g}^j, \bar{l}^j) \\
 d^{j+1,2} &= a^j * (\bar{l}^j, \bar{g}^j) \\
 a^{j+1} &= a^j * (\bar{h}^j, \bar{h}^j)
 \end{aligned} \right.$$

$$\hat{A}_{2^j}(\omega_x, \omega_y) = \frac{1}{4} \hat{D}_{2^{j+1}}^1(\omega_x, \omega_y) \hat{g}(2^j \omega_x) \hat{l}(2^j \omega_y) + \frac{1}{4} \hat{D}_{2^{j+1}}^2(\omega_x, \omega_y) \hat{l}(2^j \omega_x) \hat{g}(2^j \omega_y) \\ + \frac{1}{4} \hat{A}_{2^{j+1}}(\omega_x, \omega_y) \hat{h}(2^j \omega_x) \hat{h}(2^j \omega_y) \quad \text{修正过!!}$$

$$A_{2^j}(n, m) = \frac{1}{4} \left[\sum_{k,p} g_k l_p D_{2^{j+1}}^1(n - k2^j, m - p2^j) + \sum_{k,p} l_k g_p D_{2^{j+1}}^2(n - k2^j, m - p2^j) \right. \\ \left. + \sum_{k,p} h_k h_p A_{2^{j+1}}(n - k2^j, m - p2^j) \right]$$

$$a^j = \frac{1}{4} \left[d^{j+1,1} * (g^j, l^j) + d^{j+1,2} * (l^j, g^j) + a^{j+1} * (h^j, h^j) \right] \\ \text{修正过!!}$$

快速重构算法

二进小波的提升实现

- T. Abdukirim, M. Hussain, K. Nijima and S. Takano, The Dyadic Lifting Schemes and the Denoising of Digital images, *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing* . 6(3) (2008) 331–351.
- Yankui Sun, Lifting Construction of Spline Dyadic Wavelet filters with any Number of Vanishing Moments, *International Journal of Wavelets, Multiresolution and Information Processing* . (已录用)

二进小波的二维平稳小波变换与Mallat分解算法

孙延奎

- 本文首先研究二进小波的二维平稳小波变换，它与正交小波的二维平稳小波变换类似，由一个低频分量，水平、垂直和对角三个方向的高频分量定义；然后推导这种变换的快速算法。进一步引入`epsilon` 抽取二进离散小波变换的概念，说明它与二进小波的二维平稳小波变换之间的关系，最后讨论二进小波的Mallat分解算法及其应用。本研究能够为二进小波的二维平稳小波变换与Mallat分解算法在图像处理中的应用提供理论依据。（在审中）